Aufgabe 1

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$S_k = \frac{\exp\Big(\lambda(X_1 + \ldots + X_k)\Big)}{\Big[\mathbb{E}\Big(\exp(\lambda X_1)\Big)\Big]^k}$$

ein Martingal ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Satz 12.32 aus der Vorlesung.

Satz 12.32. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge quadratintegrierbarer Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge positiver reeller Zahlen mit $a_n \nearrow \infty$, so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\Big(X_n^2\Big)}{a_n^2} \;<\; \infty$$

ist. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} \Big(X_i - \mathbb{E}(X_i \,|\, X_{i-1}, \ldots, X_1) \Big) \right) \;=\; 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Aufgabe 3

Es sei das folgende Spielsystem für einen mehrmaligen rundenbasierten fairen Münzwurf gegeben:

Ein Spieler startet mit einem positiven Startkapital. In jeder Spielrunde setzt er sein gesamtes Kapital auf das Erscheinen von *Zahl*. Tritt *Zahl* auf, dann gewinnt er das Doppelte seines Einsatzes, bei *Kopf* verliert er seinen Einsatz komplett und hört auf zu spielen, steigt also aus. Weitere mögliche Ausgänge, wie z.B. dass die Münze auf der Kante stehen bleibt oder unwiderbringbar verschwindet, kommen nicht vor; sie können den Münzwurf daher als binär annehmen.

a) Formalisieren Sie das obige Spielsystem in der Sprache der Martingale und erklären Sie kurz alle auftretenden Größen.
b) Bestimmen Sie den erwarteten kumulierten Gewinn.
c) Ändert sich der erwartete kumulierte Gewinn, wenn der Spieler nur maximal 10 Runden spielt? Begründen Sie. Was würden Sie dem Spieler empfehlen?