

# **Kapitel 2**

## **Grundbegriffe der allgemeinen Theorie stochastischer Prozesse**

## 2.1 Definitionen stochastische Prozesse

### 2.1.1 Klassische Definition: Stochastische Prozesse als Familien von Zufallsvariablen

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  Wahrscheinlichkeitsraum

$T$  (im Allgemeinen unendliche) Indexmenge, z.B.  $\mathbb{N}_0, \mathbb{R}_+, \dots$

$\{X_t, t \in T\}$  Familie von Zufallsvariablen (ZVen)

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{S})$$

mit Wertebereich  $S$  und zugehöriger  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{S}$ .

- $S$  abzählbar,  $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$  "diskrete ZV"
- $S = \mathbb{R}$  oder Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{S} = \mathcal{B}$  oder  $\mathcal{B} \cap I$  "reellwertige ZV"
- $S = \mathbb{R}^p$  oder  $I \subset \mathbb{R}^p$ ,  $\mathcal{S} = \mathcal{B}^p$  oder  $\mathcal{B}^p \cap I$  "vektorielle ZV"

- Definition: Ein stochastischer Prozess ist das Quadrupel  $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t, t \in T\})$ .  
 $T$  heißt Parameterraum,  $S$  Zustandsraum von  $X$ .
  
- Bemerkungen:
  - Meist lässt man den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  weg. Ein stochastischer Prozess  $X = \{X_t, t \in T\}$  ist dann eine Familie von (im Allgemeinen abhängigen) Zufallsvariablen  $X_t$ .
  - Für  $T = \mathbb{N}_0$  oder  $\mathbb{R}_+$  wird  $t$  meist als diskrete oder stetige Zeit interpretiert.
  - Ist  $T \subseteq \mathbb{Z}^2$  (Gitter) oder  $T \subseteq \mathbb{R}^2$ , heißt  $X$  auch Zufallsfeld (random field)  
 $\Rightarrow$  Räumliche Statistik (eigene Vorlesung).
  - $T \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^2$ ,  $T \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^2$ ,  $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$  oder  $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}^2$   
 $\Rightarrow$  zeitlich-räumliche Statistik.

- Stochastische Prozesse werden häufig nach Zustands- und Parameterraum klassifiziert.

- Definition: Sei  $X$  ein stochastischer Prozess (SP) und  $\{t_1, \dots, t_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T$  beliebig. Dann heißen (mit  $B_1, \dots, B_n$  Mengen aus  $\mathcal{S}$ )

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n)$$

endlich-dimensionale Verteilungen des SP  $X$ .

Für reelle Zufallsvariablen heißen

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen des SP  $X$ .

Die Menge aller endlich-dimensionalen Verteilung(sfunktion)en eines SP heißt Familie der endlich-dimensionalen Verteilung(sfunktion)en.

- Endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen von SPen erfüllen die folgenden Verträglichkeitsbedingungen (Konsistenzbedingungen):

(a) Für jede Permutation  $k_1, \dots, k_n$  von  $1, \dots, n$  gilt

$$F_{t_{k_1}, \dots, t_{k_n}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

(b) Für alle  $1 \leq k < n$  und  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  gilt

$$F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty).$$

Analoge Aussagen erhält man allgemein für Verteilungen mit den Ersetzungen  $F \rightarrow P$ ,  $x_1, \dots, x_k \rightarrow B_1, \dots, B_k$  und  $\infty \rightarrow S$ .

- Eine (beliebige) endlich-dimensionale Verteilungsfamilie heißt konsistent  
: $\Leftrightarrow$  (a) und (b) gelten.

- Für jedes (feste)  $\omega \in \Omega$  heißt die Funktion

$$\begin{aligned} X(\omega) : T &\rightarrow S && (\omega \text{ fest}) \\ t &\mapsto X_t(\omega) && (t \text{ läuft}), \end{aligned}$$

Pfad, Trajektorie oder Realisierung des stochastische Prozesses  $X$ . Für festes  $\omega$  und laufendes  $t$  ist  $X_t(\omega)$  eine übliche (reelle) Folge ( $T$  diskret) bzw. Funktion ( $T$  stetig).

## 2.1.2 Stochastische Prozesse als Produktabbildungen

- Ein stochastischer Prozess lässt sich auch auffassen als Funktion der beiden Variablen  $t$  und  $\omega$ :

$$\begin{array}{ll}
 X_{\cdot}(\cdot) : T \times \Omega & \rightarrow S & \text{"Produktabbildung"} \\
 (t, \omega) & \mapsto X_t(\omega) & (t \text{ und } \omega \text{ laufen})
 \end{array}$$

- Hält man in der Produktabbildung  $t$  fest, erhält man die Zufallsvariablen zurück:

$$\begin{array}{ll}
 X_t : \Omega & \rightarrow S & (t \text{ fest}) \\
 \omega & \mapsto X_t(\omega) & (\omega \text{ läuft}).
 \end{array}$$

- Im Allgemeinen muss die Messbarkeit der Produktabbildung  $X_{\cdot}(\cdot)$  zusätzlich gefordert werden. (Der stochastische Prozess heißt dann messbar.) Alle Prozesse, die wir in der Vorlesung besprechen und alle Prozesse mit diskretem Parameterraum sind messbar.

### 2.1.3 Stochastische Prozesse als Abbildungen in Funktionenräume

- Ordnet man jedem  $\omega \in \Omega$  "seinen" Pfad  $X(\omega) \in S^T$  zu, kann man einen stochastischen Prozess auch auffassen als Abbildung in den Funktionenraum  $S^T$

$$X : \Omega \rightarrow S^T$$

$$\omega \mapsto X(\omega) = \{X_t(\omega), t \in T\}.$$

Dabei ist  $S^T$  der Raum aller Funktionen  $T \rightarrow S$ , z.B.

$$\mathbb{R}^{[0,\infty)} = \text{Raum aller Funktionen } f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \text{Raum aller (reellen) Folgen.}$$

- Vergleich mit  $p$ -dimensionaler Zufallsvariablen:

Stochastischer Prozess	$p$ -dimensionale Zufallsvariable
$\{X_t, t \in T\}$	$(X_1, \dots, X_p)'$
$T = \mathbb{R}_+, \mathbb{N}_0, \dots$	$T = \{1, 2, \dots, p\}$
$S \subseteq \mathbb{R}$	$S \subseteq \mathbb{R}$
$X(\omega)$ Punkt im Funktionenraum $S^T$	$X(\omega)$ Punkt im $\mathbb{R}^p$

- Frage: Lässt sich auf dem Funktionenraum  $S^T$  eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  definieren, so dass  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S^T, \mathcal{A})$  messbar ist?

Antwort: Ja (die von den endlich-dimensionalen Projektionen erzeugte Produkt- $\sigma$ -Algebra  $S^T$ ), wobei es oft zweckmäßig ist, den Funktionenraum einzuschränken.

- Beispiel: Der Wiener Prozess hat stetige Pfade

$$W : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (C(T), \mathcal{B}_C)$$

wobei  $C(T) =$  Raum aller stetigen Funktionen,  $\mathcal{B}_C =$  Borel- $\sigma$ -Algebra.

- Damit lässt sich die Verteilung eines stochastischen Prozesses als Bild-Wahrscheinlichkeits-Maß  $P_X$  (auf  $(S^T, \mathcal{A})$ ) der ursprünglichen Verteilung  $P$  (auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ ) betrachten:

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (S^T, \mathcal{A}, P_X).$$

$\Rightarrow$  Auffassung der Verteilung des stochastischen Prozesses  $X$  als Wahrscheinlichkeits-Maß  $P_X$  auf geeignetem Funktionenraum.

## 2.2 Existenzsatz von Kolmogorov

- Zur Definition eines stochastischen Prozesses haben wir die Existenz eines gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vorausgesetzt, aus dem die endlich-dimensionalen Verteilungen abgeleitet werden können.

In den Beispielen wurde  $(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (S, \mathcal{S})$  aber nicht explizit angegeben.

- Beispiel: Diskrete Irrfahrt

$$X_n = Z_1 + \dots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ereignis  $\omega = (z_1, \dots, z_n, \dots)$  mit  $z_n \in \{-1, 0, 1\}$

$$\Rightarrow X_n(\omega) = z_1 + \dots + z_n$$

$$\Omega = \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}} \text{ Folgenraum}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P = P_1 \times \dots \times P_n \times \dots \text{ Produkt-Ma\ss}$$

mit

$$P_n(z_n) := \begin{cases} p & \text{f\"ur } z_n = 1 \\ q & \text{f\"ur } z_n = -1 \\ r & \text{f\"ur } z_n = 0 \end{cases}$$

- Beispiel: Poisson-Prozess

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$ ,  $\omega_n \in \mathbb{R}_+$  Ergebnis von  $T_n \sim Ex(\lambda)$

$\Omega =$  Menge aller solcher Folgen

$\mathcal{F} = \mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}_+ \times \dots \times \mathcal{B}_+ \times \dots$  Produkt- $\sigma$ -Algebra

$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n \times \dots$  Produkt-Maß der Exp.-Verteilungen  $P_1, \dots, P_n, \dots$

- In den meisten Fällen ist eine solche explizite Angabe von  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  nicht möglich.
- Frage: Lässt sich ein stochastischer Prozess durch Vorgabe seiner endlich-dimensionalen Verteilungen angeben?

- Der Existenzsatz von Kolmogorov zeigt, dass es reicht, wenn man die endlich-dimensionalen Verteilungen in *konsistenter Weise* vorgibt.
- **Existenzsatz von Kolmogorov:** Sei  $\{F_{t_1, \dots, t_n}\}$  (bzw.  $\{P_{t_1, \dots, t_n}\}$ ) ein konsistentes System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen (bzw. Verteilungen). Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und ein stochastischer Prozess

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t, t \in T\})$$

mit  $F_{t_1, \dots, t_n}$  als System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen, d.h.

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

(bzw. mit  $\{P_{t_1, \dots, t_n}\}$  als System von endlich-dimensionalen Verteilungen).

- Bemerkungen:
  - Der stochastische Prozess  $X$  ist durch den Existenzsatz nicht eindeutig bestimmt. Es lässt sich immer ein Prozess  $\tilde{X}$  konstruieren, der zwar andere Pfade besitzt als  $X$ , aber die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen!

- Spezialfall mehrdimensionale Zufallsvariablen,  $T = \{1, \dots, p\}$ : Der Existenzsatz sichert zu vorgegebener gemeinsamer Verteilungsfunktion  $F(x_1, \dots, x_p)$  die Existenz eines W'Raumes  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$  mit

$$F(x_1, \dots, x_p) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_p \leq x_p).$$

Dabei kann man sogar  $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p)$  wählen, d.h. die Realisierungen  $x_1, \dots, x_p$  werden mit  $\omega$  identifiziert,  $\omega \equiv (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ .

Analog bei stochastischen Prozessen:

$$\omega \equiv \text{Pfad} \in S^T,$$

$$\Omega = \text{Menge aller Pfade.}$$

$\Rightarrow$  Man braucht sich keinen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum wie bei Irrfahrt und Poisson-Prozess zu konstruieren.

– Beispiel: Wiener Prozess

$(W_1)$ ,  $(W_2)$  und  $(W_3)$  ergeben die endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen des Wiener Prozesses (siehe 1.2.2). Der Existenzsatz garantiert die Existenz eines solchen stochastischen Prozess, dieser besitzt aber nicht notwendigerweise stetige Pfade.

Es lässt sich aber eine "Version" mit stetigen Pfaden konstruieren.

– In den folgenden Kapiteln werden wir stochastische Prozesse in der Regel so einführen:

Vorgabe von "Konstruktionsvorschriften" bzw. "Axiomen".

⇒ endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen.

⇒ stochastischer Prozess inklusive Wahrscheinlichkeitsraum.

## 2.3 Äquivalenz- und Stetigkeitsbegriffe

### 2.3.1 Äquivalente stochastische Prozesse

- Seien im Folgenden stets  $X = \{X_t, t \in T\}$  und  $Y = \{Y_t, t \in T\}$  zwei stochastische Prozesse auf dem gleichen W'Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit gleichem Zustandsraum  $(S, \mathcal{S})$ .

- $X$  und  $Y$  heißen **verteilungsäquivalent** (schwach äquivalent)  $:\Leftrightarrow$

Die endlich-dimensionalen Verteilungen von  $X$  und  $Y$  sind gleich  $\Leftrightarrow$

$\forall \{t_1, \dots, t_n\} \in T, \{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n).$$

- $X$  und  $Y$  heißen **äquivalent**  $:\Leftrightarrow$

$$P(\{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in T$$

Man bezeichnet  $Y$  dann auch als **Version** von  $X$ .

- $X$  und  $Y$  heißen **ununterscheidbar**  $:\Leftrightarrow$

$X$  und  $Y$  haben mit Wahrscheinlichkeit 1 gleiche Pfade  $\Leftrightarrow$

$$P(X_t = Y_t, \quad \forall t \in T) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

- Es gilt:

$X, Y$  ununterscheidbar  $\Rightarrow$  äquivalent  $\Rightarrow$  verteilungsäquivalent.

Falls  $T$  abzählbar:  $X, Y$  ununterscheidbar  $\Leftrightarrow$  äquivalent.

### Beweis:

ununterscheidbar  $\Rightarrow$  äquivalent: klar, da  $1 = P(X_t = Y_t \quad \forall t) \leq P(X_t = Y_t) \leq 1 \quad \forall t$

äquivalent  $\Rightarrow$  verteilungsäquivalent:

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) &= P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n, X_{t_1} = Y_{t_1}, \dots, X_{t_n} = Y_{t_n}) \\ &= P(Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n, X_{t_1} = Y_{t_1}, \dots, X_{t_n} = Y_{t_n}) \\ &= P(Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n) \end{aligned}$$

$T$  abzählbar: äquivalent  $\Rightarrow$  ununterscheidbar

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad P(X_t \neq Y_t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{t=1}^{\infty} P(X_t \neq Y_t) = 0$$

$$0 \leq P\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} \{X_t \neq Y_t\}\right) \leq \sum_{t=1}^{\infty} P(X_t \neq Y_t) = 0$$

$$\Rightarrow 1 = P\left(\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} \{X_t \neq Y_t\}}\right) \stackrel{\text{(de Morgan)}}{=} P\left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \{X_t = Y_t\}\right) = P(X_t = Y_t \quad \forall t)$$

□

Gegenbeispiel für die Rückrichtung für nicht abzählbares  $T$ :

$$X : X_t(\omega) = 0 \quad \forall t \in T, \omega \in \Omega, \text{ d.h. alle Pfade } \equiv 0$$
$$Y : Y_t(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad t = \tau(\omega) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist  $\tau > 0$  stetige ZV, z.B.  $\tau \sim \text{Ex}(\lambda)$

$X$  und  $Y$  sind verteilungsäquivalent.

Da  $X_t(\omega) = 0$  für alle  $(t, \omega) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(\{\omega : Y_t(\omega) = X_t(\omega)\}) &= P(\{\omega : Y_t(\omega) = 0\}) \\ &= P(\{\omega : \tau(\omega) \neq t\}) = 1 \quad \forall t \in T \end{aligned}$$

$\Rightarrow X$  und  $Y$  äquivalent, aber unterscheidbar.

## 2.3.2 Stetigkeitsbegriffe

- Im Folgenden seien  $T \subseteq \mathbb{R}_+$ ,  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{S} = \mathcal{B} \cap S$
- $X$  heißt (fast sicher) pfadstetig  $:\Leftrightarrow$

$$P(\{\omega : \lim_{s \rightarrow t} X(s, \omega) = X(t, \omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\}) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$P(\lim_{s \rightarrow t} X(s) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$$

- Analog definiert man fast sicher rechtsstetig ( $s \downarrow t$ ), fast sicher cadlag (continué á droite limité á gauche, rechtsstetig mit Grenzwerten von links), etc.
- $X$  heißt (fast sicher) stetig  $:\Leftrightarrow$

$$P(\{\omega : \lim_{s \rightarrow t} X(s, \omega) = X(t, \omega)\}) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

- $X$  heißt stochastisch stetig : $\Leftrightarrow$

$$\lim_{s \rightarrow t} P(\omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0, t \in \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow \text{p} - \lim_{s \rightarrow t} X(s) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

" $X(s)$  konvergiert nach Wahrscheinlichkeit gegen  $X(t) \forall t \in \mathbb{R}$ ".

- (fast sicher) pfadstetig  $\Rightarrow$  (fast sicher) stetig  $\Rightarrow$  stochastisch stetig
- Sind  $X$  und  $Y$  äquivalent und fast sicher pfad-rechtsstetig, so sind  $X$  und  $Y$  ununterscheidbar.

**Beispiel: Poisson-Prozess**

- (a)  $N$  nicht pfadstetig
- (b)  $N$  fast sicher stetig
- (c)  $N$  stochastisch stetig

**Beweis:**

- (c)  $N$  stochastisch stetig:

$$P(|N(t) - N(s)| > \epsilon) \leq P(|N(t) - N(s)| \geq 1) = 1 - e^{-\lambda|t-s|}$$

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|N(t) - N(s)| > \epsilon) \leq \lim_{s \rightarrow t} (1 - e^{-\lambda|t-s|}) = 0$$

- (b)  $N$  fast sicher stetig:

$$\{\omega : N(t, \omega) \text{ stetig in } t \geq 0\} = \{\omega : S_n(\omega) \neq t, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Da  $S_n$  Gamma-verteilte ZV:

$$P(\{\omega : S_n(\omega) = t\}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : S_n(\omega) \neq t\}}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : S_n(\omega) = t\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : S_n(\omega) = t\} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : S_n(\omega) \neq t\}\right) = 1$$

□

## 2.4 Stationäre und nichtstationäre stochastische Prozesse

- Ein stochastischer Prozess  $X$  heißt streng stationär  $:\Leftrightarrow \forall n, t_1, \dots, t_n, h$  gilt

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n)$$

d.h. die endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen sind invariant gegenüber einer Zeitverschiebung  $h$ .

- Folgerungen:
  - $F_t(x_1) = F_{t+h}(x_1)$ , d.h. die eindimensionalen Verteilungen sind zeitinvariant.
  - Erwartungswert und Varianz sind unabhängig von  $t$ :

$$E(X_t) = \mu \quad \text{Var}(X_t) = \sigma^2.$$

- Die Kovarianz zwischen  $X_s, X_t$  hängt nur von Zeitdifferenz  $t - s$ , nicht von den Werten  $t, s$  auf der Zeitachse selbst ab:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_s, X_t) &= \int (x_1 - \mu)(x_2 - \mu) dF_{x_s, x_t}(x_1, x_2) \\ &= \int (x_1 - \mu)(x_2 - \mu) dF_{x_0 x_{t-s}}(x_1, x_2) \\ &= \text{Cov}(X_0, X_{t-s}) \\ &=: \gamma(t - s)\end{aligned}$$

- $\gamma(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \text{Cov}(X_h, X_0)$  heißt (Auto-)Kovarianzfunktion.
- $\gamma(h)$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \gamma(-h) \\ |\gamma(h)| &\leq \gamma(0) = \sigma^2 = \text{Var}(X_t)\end{aligned}$$

- Ein stochastischer Prozess  $X$  heißt schwach stationär : $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu, \quad \text{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(t - s)$$

d.h. die ersten beiden Momente sind verschiebungsinvariant.

- Es gilt

Strenge Stationarität  $\Rightarrow$  Schwache Stationarität.

Für Gauß-Prozess sind schwache Stationarität und starke Stationarität äquivalent.

Es gibt auch Nicht-Gauß-Prozesse, bei denen schwache und starke Stationarität äquivalent sind.

- Analog zur Auto-Kovarianz definiert man die Autokorrelationsfunktion

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(h)}{\sigma^2} \quad h \geq 0.$$

**Beispiel:**

(a) Poisson-Prozess:

Der Poisson-Prozess  $N$  ist nichtstationär, da  $E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \lambda t$  nicht konstant ist. Dagegen sind die Zuwächse stationär (und unabhängig).

(b) Wiener-Prozess:

Der Wiener-Prozess  $W$  ist ebenfalls nichtstationär, da zwar  $E(W(t)) = 0$ , aber  $\text{Var}(W(t)) = \sigma^2 t$  gilt. Die Zuwächse sind stationär (und unabhängig).

(c) Sei  $\epsilon = \{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  eine Folge unkorrelierter ZVen mit  $E(\epsilon_t) = 0$ ,  $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2$ . Ein solcher stationärer stochastischer Prozess heißt (diskretes) Weißes Rauschen. Gilt zusätzlich  $\epsilon_t$  iid  $N(0, \sigma^2)$ , so heißt  $\epsilon$  Gauß'sches Weißes Rauschen.

Der stochastische Prozess  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  mit

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_q \neq 0$$

heißt Moving Average-Prozess (Prozess der gleitenden Durchschnitte) der Ordnung  $q$ , in Zeichen  $X \sim MA(q)$ .

Eigenschaften:

$$* \mathbf{E}(X_t) = 0$$

$$* \mathbf{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2$$

$$* \gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(\theta_0\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \dots + \theta_{q-h}\theta_q) & , \quad |h| \leq q \\ 0 & , \quad |h| > q. \end{cases}$$

\* Der  $MA(q)$ -Prozess ist stationär mit Autokorrelationsfunktion

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2} & , \quad 0 \leq h \leq q \\ 0 & , \quad h > q. \end{cases}$$

- (d) Komponentensatz für Zeitreihen: Obwohl viele Zeitreihen in der Praxis kaum als stationär angenommen werden können, bilden stationäre Prozesse einen wichtigen Baustein für realitätsgetreuere Modelle. Man nimmt häufig an, dass sich die Original-Zeitreihe  $Y_t$  zerlegen lässt in eine Trendkomponente  $T_t$ , eine Saisonkomponente  $S_t$  und einen stationären Fehler  $X_t$ :

$$Y_t = T_t + S_t + X_t.$$

- (e) Die Gauß'sche Irrfahrt

$$X_0 = 0$$

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d.}$$

ist nicht stationär, da zwar  $E(X_t) = 0$  aber  $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$  gilt.

- Der Prozess

$$X_t = \delta X_{t-1} + \epsilon_t \quad \text{mit} \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

heißt autoregressiver Prozess erster Ordnung ( $AR(1)$ ).

- Für  $|\delta| < 1$  ist der  $AR(1)$ -Prozess (bei  $t \rightarrow \infty$ ) stationär.

Für jeden Startwert  $X_0$  konvergiert die Verteilung von  $X_t$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $N(0, \frac{\sigma^2}{(1-\delta^2)})$ .

Fordert man  $X_0 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{(1-\delta^2)})$  (d.h. der Prozess wird bereits im "Equilibrium" / "Gleichgewicht" gestartet), so gilt (nicht nur asymptotisch sondern exakt):

–  $E(X_t) = 0,$

–  $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{(1-\delta^2)},$

–  $\text{Corr}(X_s, X_t) = \delta^{|s-t|},$  insbesondere  $\text{Corr}(X_t, X_{t+1}) = \delta.$

- Bei Vorliegen eines  $AR(1)$ -Prozess kann man  $\delta$  durch die empirische Autokorrelation (zum Lag 1) schätzen:

$$\hat{\delta} = \hat{\rho}(1) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\hat{\sigma}^2}$$

mit  $\hat{\sigma}^2 = \widehat{\text{Var}}(X_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (X_t - \bar{X})^2$  die empirische Varianz.

- Schätzung der empirischen Korrelationsfunktion zum Lag  $l$

$$\hat{\rho}(l) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-l} - \bar{X})}{\hat{\sigma}^2}.$$

(f) Stationäre Gauß-Prozesse  $\{X(t), t \geq 0\}$  oder  $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t)) &= \mu, \\ \text{Var}(X(t)) &= \sigma^2, \\ \rho(h) &= \text{Corr}(X(t), X(t+h)) \\ &= \text{Corr}(X(0), X(h)) \text{ (vorgegebene Korrelationsfunktion)} \end{aligned}$$

Für alle  $n \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_n$  ist  $X_{(n)} = (X(t_1), \dots, X(t_n))'$  multivariat normalverteilt mit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{(n)}) &= (\mu, \dots, \mu)' \\ \text{Cov}(X_{(n)}) &= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho(t_2 - t_1) & \dots & \rho(t_n - t_1) \\ \rho(t_1 - t_2) & 1 & & \rho(t_n - t_2) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \rho(t_1 - t_{n-1}) & & \ddots & \rho(t_n - t_{n-1}) \\ \rho(t_1 - t_n) & \dots & \rho(t_{n-1} - t_n) & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei  $\rho$  eine symmetrische Autokorrelationsfunktion ist.

Parametrische Modelle für Korrelationsfunktionen  $\rho(h)$

– müssen positiv semi-definit sein, d.h.

$$\text{Var}(a_1 X(t_1) + \dots + a_n X(t_n)) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i a_j \gamma(t_i - t_j) \geq 0$$

für beliebige  $a_i, a_j, t_i, t_j$ . Analog für  $\rho$ .

- wünschenswert:  $\rho(h)$  fallend in  $h$ ,  $\rho(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow \infty$ . Wenigstens ein Parameter steuert, wie schnell  $\rho(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow \infty$  geht.
- Beispiele:
  - \* Potenz-Exponentialfamilie:

$$\rho(u) = \exp \left\{ - \left( \frac{|u|}{\phi} \right)^\kappa \right\}, \quad \phi > 0, 0 < \kappa \leq 2.$$

$\kappa = 1$ : Exponential-Korrelationsfunktion.

$\kappa = 2$ : Gauss-Korrelationsfunktion.

- \* Matérn-Familie

$$\rho(u) = \frac{1}{2^{\kappa-1} \Gamma(\kappa)} \left( \frac{|u|}{\phi} \right)^\kappa K_\kappa \left( \frac{|u|}{\phi} \right) \quad \phi > 0, \kappa > 0.$$

$K_\kappa$  die Besselfunktion, i.A. nicht in geschlossener Form angebar.

$\kappa \rightarrow \infty$ : Gauß-Korrelationsfunktion.

- \* jeweils  $\kappa$ : Form, Glattheit;  $\phi$ : Skalenparameter.