3.2 Klassifizierung von Zuständen und Rückkehrverhalten

- Definition: Erreichbarkeit

  1. Der Zustand j heißt von i aus erreichbar $(i \to j) :\Leftrightarrow$

     $$\exists\, t \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } p_{ij}^{(t)} > 0$$

     d.h. es muss ein Weg im Markov-Graphen von i nach j führen. Eine direkte Kante $i \to j$ ist aber i.A. nicht notwendig!

2. Die Zustände i und j heißen gegenseitig erreichbar $(i \leftrightarrow j) :\Leftrightarrow$

$$i \to j \quad \text{und} \quad j \to i$$

- Die wechselseitige Erreichbarkeit $i \leftrightarrow j$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. die Menge aller Zustände lässt sich zerlegen in Äquivalenzklassen wechselseitig erreichbarer Zustände.

Beweis:

Beweis Äquivalenzrelation

Zu zeigen:

1. $i \leftrightarrow i$ (Reflexivität), gilt nach Definition.
2. $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$ (Symmetrie), gilt nach Definition.
3. $i \leftrightarrow j$ und $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$ (Transitivität): Wegen $i \leftrightarrow j$ und $j \leftrightarrow k$ existieren $t, s \in \mathbb{N}_0$ mit $p_{ij}^{(t)} > 0$, $p_{jk}^{(s)} > 0$. Nach der Chapman-Kolmogorov-Gleichung folgt

$$p_{ik}^{(t+s)} = \sum_{l \in S} p_{il}^{(t)} p_{lk}^{(s)} \geq p_{ij}^{(t)} p_{jk}^{(s)} > 0,$$

und damit $i \to k$. Analog zeigt man $k \to i$.

$\square$

- Klassifizierung nach Erreichbarkeit:

1. $C \subseteq S$ heißt abgeschlossen :$\Leftrightarrow$ kein Zustand in $S \setminus C$ ist von C aus erreichbar. C heißt offen :$\Leftrightarrow$ C nicht abgeschlossen.
2. Ein Zustand i heißt absorbierend :$\Leftrightarrow$ $\{i\}$ abgeschlossen, d.h. $p_{ii} = 1$.
3. Ein abgeschlossenes C heißt irreduzibel :$\Leftrightarrow$ keine echte, nichtleere Teilmenge von C ist abgeschlossen
4. Eine Markov-Kette heißt irreduzibel :$\Leftrightarrow$ S irreduzibel $\Leftrightarrow$ alle Zustände sind gegenseitig erreichbar.

Beispiel: Irrfahrt mit absorbierenden Schranken

Äquivalenzklassen: $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{1, 2, \ldots, a-1\}$, $C_3 = \{a\}$

Abgeschlossene Mengen: C_1, C_3, $C_1 \cup C_3$, $C_1 \cup C_2 \cup C_3$

Irreduzible Mengen: nur C_1, C_3

- Damit zerfällt S in offene und abgeschlossene, irreduzible Teilmengen wechselseitig erreichbarer Zustände. Bei einer Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen existiert mindestens eine abgeschlossene irreduzible Klasse C. Eine offene Klasse kann existieren, muss aber nicht.

- Klassifizierung nach Rückkehrverhalten ($i \in S$):

  Es sei T_{ii} die zufällige Zeit bis zur ersten Rückkehr nach i bei einem Start in i, und $E(T_{ii}|X_0 = i) = \mu_{ii}$ die erwartete Rückkehrzeit.

  1. i heißt rekurrent :⇔
     $$P(T_{ii} < \infty | X_0 = i) = 1$$
     (mit Wahrscheinlichkeit 1 Rückkehr in endlicher Zeit).

  2. i heißt transient :⇔
     $$P(T_{ii} < \infty | X_0 = i) < 1$$
     (mit positiver Wahrscheinlichkeit keine Rückkehr).

  3. Bei rekurrenten Zuständen kann man weiter unterscheiden in

     positiv-rekurrent :⇔ $\mu_{ii} < \infty$

     null-rekurrent :⇔ $\mu_{ii} = \infty$

4. i heißt periodisch mit Periode d :$\Leftrightarrow$ $d \geq 2$ größte natürliche Zahl mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T_{ii} = nd | X_0 = i) + P(T_{ii} = \infty | X_0 = i) = 1$$

   (Rückkehr nur zu Vielfachen von d möglich, Periodengitter).
   i heißt aperiodisch für $d = 1$ (bzw. $d = \infty$)

5. i heißt ergodisch :$\Leftrightarrow$ i positiv-rekurrent und aperiodisch (wichtiger Spezialfall).

- Für eine Markov-Kette mit endlichem S gilt für Zustand i und Äquivalenzklasse C

1. i positiv-rekurrent $\Leftrightarrow$ i rekurrent (keine Fallunterscheidung).

2. C abgeschlossen $\Leftrightarrow$ alle Zustände aus C (positiv-)rekurrent.

3. C offen $\Leftrightarrow$ alle Zustände aus C transient.

- Beispiele

(a) Irrfahrt mit $r_i = 0$: jeder Zustand i ist (null-)rekurrent für $p = \frac{1}{2}$ und transient für $p \neq \frac{1}{2}$.

(b) Erneuerungsprozess: Zustände in Abhängigkeit von den bedingten Überlebens- und Ausfallwahrscheinlichkeiten p_i, q_i transient / positiv-rekurrent / null-rekurrent.

transient für

$$p_i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad q_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad i \geq 1\,,\ p_0 = 1,\ q_0 = 0$$

$$i = 0 : P(T_{ii} < \infty | X_0 = i) = \sum_{k=2}^{\infty} P(T_{ii} = k | X_0 = i) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\prod_{l=0}^{k-2} p_l \right) \cdot q_{k-1}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \prod_{l=1}^{k-2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l} \right] \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \sum_{k=2}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} - 2 \cdot \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

positiv-rekurrent für

$$p_i = q_i = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0,$$

$$\mu_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2 < \infty$$

null-rekurrent für

$$p_i = \frac{i}{i+1}, \quad q_i = \frac{1}{i+1}, \quad i \geq 1\,,\ p_0 = 1,\ q_0 = 0.$$

Speziell für $i = 0$:

$$\begin{aligned}
P(T_{00} < \infty | X_0 = 0) &= q_0 + p_0 \cdot q_1 + p_0 \cdot p_1 \cdot q_2 + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + \dots \\
&= 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \\
\mu_{00} &= 1 \cdot q_0 + 2 \cdot p_0 \cdot q_1 + 3 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot q_2 + 4 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + \dots \\
&= 0 + 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.
\end{aligned}$$

(c)

- Resultate:

1. Rekurrenz, Transienz, Periodizität und Ergodizität sind Äquivalenzklasseneigenschaften, d.h. alle Zustände einer Klasse sind rekurrent, transient, periodisch oder ergodisch.
2. i rekurrent und $i \to j \quad \Rightarrow \quad i \leftrightarrow j$ und auch j rekurrent.
3. i rekurrent $\Rightarrow$ es existiert eine irreduzible Klasse $C(i)$ von rekurrenten Zuständen mit $i \in C(i)$.
4. C irreduzible, endliche Klasse $\Rightarrow$ alle Zustände positiv rekurrent
5. C endliche Klasse $\Rightarrow$
   C rekurrent $\Leftrightarrow$ C abgeschlossen
   C transient $\Leftrightarrow$ C offen
   Für endliches S gilt also: offen$=$transient und abgeschlossen$=$rekurrent
6. MK endlich $\Rightarrow$ es existiert mindestens eine rekurrente Klasse.

- Kanonische Repräsentation

  S lässt sich zerlegen in irreduzible Teilmengen $C_1, C_2, \ldots$ und eine Restmenge T transienter Zustände. Seien nach evtl. Umnummerierung $P_1, P_2, \ldots, Q$ die dazugehörigen Teilmatrizen der Übergangsmatrix P, so gilt

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ L_1 & L_2 & \cdots & \cdots & Q \end{pmatrix}$$

- Klassifizierung für endliche Markov-Ketten:
  - Bestimme (etwa mit Hilfe des Erreichbarkeitsgraphen) die irreduziblen Äquivalenzklassen. Diese sind alle positiv rekurrent, der Rest ist transient.
  - Bestimme für jede Klasse die Periode.

    Beispiele:

    (a) Markov-Kette für DNA-Sequenzen mit $S = \{A, C, G, T\}$ ist ergodisch.

    (b) Absorbierende Markovketten:
      * endliche Menge absorbierender Zustände
      * Menge transienter Zustände

Kanonische Repräsentation:

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ L & Q \end{pmatrix}}_{\text{Zeilensummen in } (L|Q)=1}, \text{ mit } I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

z.B.Irrfahrtsmodell mit absorbierenden Schranken z.B. Heiratsmodell in der Demographie:

$x = 1, 2, \ldots, w$ Alter eines Ledigen in Jahren, w Altersobergrenze für Betrachtung

Zustände:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \text{Heirat (vor Tod)} \\ \text{II} & \text{Tod als Junggeselle} \\ s & \text{im Alter } w+1 \text{ noch ledig} \end{array}\right\} \text{absorbierende Zustände}$$
$$x = 0, 1, 2, \ldots, w \text{ im Alter } x \text{ ledig.}$$

Für x-jährigen Ledigen im Altersintervall $(x, x+1]$ drei Möglichkeiten:

* Heirat mit Wahrscheinlichkeit $q_{x,I}$
* als Junggeselle sterben mit Wahrscheinlichkeit $q_{x,II}$
* als Lediger das Alter $x+1$ erreichen mit Wahrscheinlichkeit p_x.

$\Rightarrow$ Übergangsmatrix

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} I & II & s & 0 & 1 & \dots & \dots & w \end{array} \\
\begin{array}{c} I \\ II \\ s \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ w \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & & & & & 0 \\
0 & 1 & 0 & & & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & \\
q_{0,I} & q_{0,II} & q_{0,s} & 0 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & p_1 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & p_{w-1} \\
q_{w,I} & q_{w,II} & p_w & 0 & & & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$