3.3 Grenzverhalten homogener Markov-Ketten

- Fragestellung:

$$P^t = (p_{ij}^{(t)}) \to ? \quad \text{für} \quad t \to \infty$$
$$p(t) = \{P(X_t = i)\} \to ? \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

Wir betrachten nur aperiodische Markov-Ketten.

- Grenzwertsatz für die t-schrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(t)}$

Sei j transient oder null-rekurrent. Dann ist $\forall i \in S$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = 0.$$

Sei j positiv-rekurrent und aperiodisch. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} p_{jj}^{(t)} &= \frac{1}{\mu_{jj}} = \frac{1}{E(T_{jj})} \\
\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} &= \lim_{t\to\infty} p_{jj}^{(t)} \quad \forall\, i \text{ mit } i \leftrightarrow j \\
\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} &= f_{ij}\frac{1}{\mu_{jj}} =: l_{ij}^{(\infty)} \quad \forall\, i \in S
\end{aligned}$$

Dabei ist f_{ij} die Wahrscheinlichkeit in endlicher Zeit von i nach j zu gelangen:

- Für rekurrentes i aus der gleichen Klasse wie j ist $f_{ij} = 1$.
- Für $i \in C$, C abgeschlossen, $j \notin C$, ist $f_{ij} = 0$.
- Für transientes i ist $f_{ij} = P(j$ wird von i aus (irgendwann) erreicht).

Plausibilitätserklärung:

- j transient:
- j null-rekurrent:
- j positiv rekurrent und aperiodisch:

In der kanonischen Repräsentation ergibt sich also folgende Blockgestalt:

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix} P_1^{\infty} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_2^{\infty} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ L_1^{\infty} & L_2^{\infty} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Interpretation von $p_{ij}^{(\infty)}$ für aperiodische, rekurrente $i \leftrightarrow j$: $p_{ij}^{(\infty)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$ ist die relative Häufigkeit der Besuche in j, bezogen auf die Gesamtzahl aller Übergänge (für $t \to \infty$).

- Problem: Berechnung der Erwartungswerte $E(T_{jj}) = \mu_{jj}$.

- Grenzwertsatz für ergodische Markov-Ketten:

  Für eine irreduzible, aperiodische MK gilt: Sind alle Zustände positiv rekurrent, dann besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i \in S} \pi_i \, p_{ij}, \quad j \in S \\ \sum_{j \in S} \pi_j &= 1 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} \pi &= \pi P \\ \pi \mathbb{1} &= 1, \end{aligned}$$

  mit dem Zeilenvektor $\pi = (\pi_j; j \in S)$, eine eindeutige, strikt positive Lösung $(\pi_j > 0, \forall\, j \in S)$ und es gilt

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} p_{ij}^{(t)} = \frac{1}{\mu_{jj}},$$

  sowie

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \lim_{t \to \infty} p(0) P^t = p(0) P^{\infty} = \pi$$

  für jede beliebige Anfangsverteilung $p(0)$.

Umgekehrt gilt auch: Ist das obige Gleichungssystem eindeutig und strikt positiv lösbar, so sind alle Zustände positiv rekurrent.

- Folgerung: Für eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen hat das Gleichungssystem eine eindeutige, strikt positive Lösung.