Kapitel 4
Diskrete Markov-Prozesse

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

- Stetige Zeit aber weiterhin diskreter Zustandsraum.

- Beispiele:
  - Klinische Studien, Krankenverläufe
  - Markenwahlprozesse
  - Poisson-Prozess
  - Stochastische Modelle für die molekulare Evolution, d.h. die durch Mutation verursachte Veränderung der Nukleotide A, T, C, G an bestimmten Positionen der DNA. Vereinfachende Annahme: Die Evolution an verschiedenen Positionen verläuft unabhängig. Dann genügen separate Modelle für die Positionen.

    Weitere Annahme: Homogenität und Stationarität. Verschiedene Modelle unterscheiden sich durch Annahmen an die Raten λ_{ij} für Übergänge $i \to j$.

- Definition: Diskreter Markov-Prozess

  Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit abzählbarem Zustandsraum heißt (diskreter) Markov-Prozess $:\Leftrightarrow \forall n \geq 0$, $\forall t > s > s_n > \ldots > s_0 \geq 0$ gilt

  $$P(X(t) = j | X(s) = i, X(s_n) = i_n, \ldots, X(s_0) = i_0) = P(X(t) = j | X(s) = i)$$

  für beliebige $j, i, i_n, \ldots, i_0 \in S$.

  $$p_{ij}(s,t) := P(X(t) = j | X(s) = i)$$

  heißt Übergangswahrscheinlichkeit(-sfunktion) und

  $$P(s,t) = (p_{ij}(s,t))$$

  Übergangsmatrix. Ein Markov-Prozess heißt homogen (oder besitzt stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten) $:\Leftrightarrow$

  $$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i) = p_{ij}(0,t) =: p_{ij}(t),$$

  d.h. nur die Zeitdifferenz ist maßgeblich. Dann ist $P(t) := (p_{ij}(t))_{i,j \in S}$.

- Bemerkungen:
  - Wie bei den Markov-Ketten werden wir uns im Folgenden meist auf homogene Markov-Prozesse beschränken.
  - $p_{ij}(t)$ entspricht $p_{ij}^{(t)}$ (t-schrittige Übergangswahrscheinlichkeit) bei Markov-Ketten.
  - Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt

$$p_{ij}(t) \geq 0, \qquad \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$$

- Chapman-Kolmogorov-Gleichung (für homogene Markov-Prozesse)

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

- Gemeinsame Verteilung: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}_+$, $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$ gilt

$$\begin{aligned} P(X(t_n) &= i_n, \ldots, X(t_1) = i_1 | X(t_0) = i_0) \\ &= p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X(t_n) &= i_n, \ldots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) \\ &= P(X(t_0) = i_0) \cdot p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Satz von Kolmogorov & Likelihood.

- Im Folgenden setzen wir stets voraus

$$p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

d.h. ein Übergang von i nach j ($i \neq j$) beansprucht eine positive Zeitspanne.

- Definition: (Übergangs-)Intensität, Rate

  Für $i, j \in S,\ i \neq j$, heißt

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j | X(t) = i)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j | X(t) = i, \text{Vorgeschichte})}{h} = p'_{ij}(0) \end{aligned}$$

  Übergangsintensität bzw. Rate für den Übergang von i nach j.

  Für $i = j$ definieren wir

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}.$$

  Allgemein gilt also für $i, j \in S$

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$$

  mit $0 \leq \lambda_{ij} < \infty$ für $i \neq j$, aber $\lambda_{ii} \leq 0$.

- $\Lambda = (\lambda_{ij})$ heißt Intensitätsmatrix.
- In $o(h)$–Schreibweise gilt also für $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(h) &= P(X(t+h) = j | X(t) = i) = \lambda_{ij} h + o(h), \\
p_{ii}(h) &= 1 + \lambda_{ii} h + o(h).
\end{aligned}
$$

- Beispiel: Poisson-Prozess

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) \\ p_{ij}(h) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq i-1 \\ o(h), & j \geq i+2 \end{cases} \\ p_{ii}(h) &= 1 - \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i+1} &= \lambda \\ \lambda_{ij} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq i-1 \\ 0, & j \geq i+2 \end{cases} \\ \lambda_{ii} &= -\lambda \end{aligned}$$

4.2 Geburts- und Todesprozesse

- Definition: Geburtsprozess

Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt Geburtsprozess :$\Leftrightarrow$ X ist ein homogener, diskreter MP mit

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), \\ p_{i,i}(h) &= 1 - \lambda_i h + o(h), \qquad \lambda_i \geq 0 \qquad i \geq i_0 \\ p_{i,j}(h) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq j \leq i-1 \\ o(h) & , \quad j \geq i+2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Datenstruktur wie beim Poisson-Prozess, aber zustandsabhängige Intensitäten λ_i.

- Analog zum Poisson-Prozess gilt

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_i \ , \quad \lambda_{ii} = -\lambda_i, \quad \lambda_{ij} = 0 \ \text{für} \ j \notin \{i, i+1\}.$$

- Herleitung der Übergangswahrscheinlichkeiten (ÜW)

$$p_{0n}(t) = P(X(t) = n \mid X(0) = 0)$$

aus den Intensitäten.

Erinnerung: Beim Poisson-Prozess $p_{on}(t)$ Poissonverteilt.

Herleitung der ÜW (mit $i_0 = 0$):

$n \geq 1:$

$$\begin{aligned}
p_{0n}(t+h) &= P(X(t+h) = n \mid X(0) = 0) \\
&\overset{\text{Chap.-Kolm.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(t) p_{kn}(h) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} p_{0k}(t) p_{kn}(h)}_{o(h),[X(t)\leq n-2]} + \underbrace{p_{0,n-1}(t)[\lambda_{n-1}h + o(h)]}_{[X(t)=n-1]} \\
&\quad + \underbrace{p_{0n}(t)(1-\lambda_n h + o(h))}_{[X(t)=n]} \\
&= p_{0n}(t)(1-\lambda_n h) + p_{0,n-1}(t)\lambda_{n-1}h + o(h)
\end{aligned}$$

$n = 0:$

$$p_{00}(t+h) = p_{00}(t)(1-\lambda_0 h) + o(h)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_{0n}^{'}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{p_{on}(t+h) - p_{on}(t)}{h} = -\lambda_n p_{0n}(t) + \lambda_{n-1} p_{0,n-1}(t), \quad n \geq 1 \\ p_{00}^{'}(t) &= -\lambda_0 p_{00}(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ DLG mit Anfangsbedingungen $\quad p_{00}(0) = 1, \quad p_{0n}(0) = 0 \quad$ für $n \geq 1$,

Falls $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ ergibt sich die Lösung

$$p_{0n}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_n^{(i)} e^{-\lambda_i t} \ , \qquad n \geq 0,$$

$$\text{mit } A_n^{(i)} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{(\lambda_0 - \lambda_i) \ldots (\lambda_{i-1} - \lambda_i)(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \ldots (\lambda_n - \lambda_i)}.$$

$\rightarrow$ Herleitung der ÜW aus Intensitäten bereits in einfachem Spezialfall aufwendig.

I.A. keine analytische Lösung, vgl. Abschnitt 4.3

- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0n}(t) = 1 \quad \forall\, t \geq 0$$

ergibt sich genau dann, wenn

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty.$$

Gegenbeispiel: Rate $\lambda_i = 2^i$.

- Exponentialverteilte Verweildauern: Die Verweildauern T_n, $n \in \mathbb{N}$, im jeweiligen Zustand i sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ_i, d.h.

$$T_n \sim Ex(\lambda_i).$$

- Interpretation: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$ ist die erwartete Zeit bevor $\{X(t) = \infty\}$ eintritt. Falls die Summe divergiert scheint plausibel, dass $P\{X(t) = \infty\} = 0$ gilt.

- Yule-Prozess: Population mit Anfangsbestand von $X(0) = i_0$ Individuen. Unabhängige Vermehrung, wobei jedes Individuum im Zeitintervall h mit Wahrscheinlichkeit $\lambda h + o(h)$ ein weiteres Mitglied der Population erzeugt und die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung mehrerer Individuen $o(h)$ sei.

  Der binomische Lehrsatz liefert

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \binom{i}{1}(\lambda h + o(h))(1 - \lambda h + o(h))^{i-1} = i\lambda h + o(h) \\ p_{i,j}(h) &= \binom{i}{j-i}(\lambda h + o(h))^{j-i}(1 - \lambda h + o(h))^{i-(j-i)} = o(h) \text{ für } j - i \geq 2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Geburtsprozess mit Rate $\lambda_i = i\lambda$.
$X(t) - i_0$ besitzt eine negative Binomialverteilung mit Parametern i_0 und $\exp(-\lambda t)$.

$$\begin{aligned} E(X(t) - i_0) &= \frac{i_0(1 - \exp(-\lambda t))}{\exp(-\lambda t)}, \\ Var(X(t) - i_0) &= \frac{i_0(1 - \exp(-\lambda t))}{\exp(-2\lambda t)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ exponentielles Wachstum:

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= i_0 \exp(\lambda t), \\ Var(X(t)) &= i_0 \exp(\lambda t)(\exp(\lambda t) - 1). \end{aligned}$$

- Definition: Geburts- und Todesprozess

Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt Geburts- und Todesprozess $:\Leftrightarrow$ X ist ein homogener, diskreter MP mit

$$\begin{array}{rclll} p_{i,i+1}(h) & = & \lambda_i h + o(h) & & i \geq 0 \\ p_{i,i-1}(h) & = & \mu_i h + o(h) & & i \geq 1 \\ p_{ii}(h) & = & 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & & i \geq 0 \\ p_{ij}(h) & = & o(h) & & \mid i - j \mid \geq 2, \quad i, j \geq 0 \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \\ \lambda_0 &\geq 0 \quad (> 0 \text{ reflektierend}, = 0 \text{ absorbierend}), \\ \mu_i, \lambda_i &\geq 0 \quad \text{für } i \geq 1. \end{aligned}$$

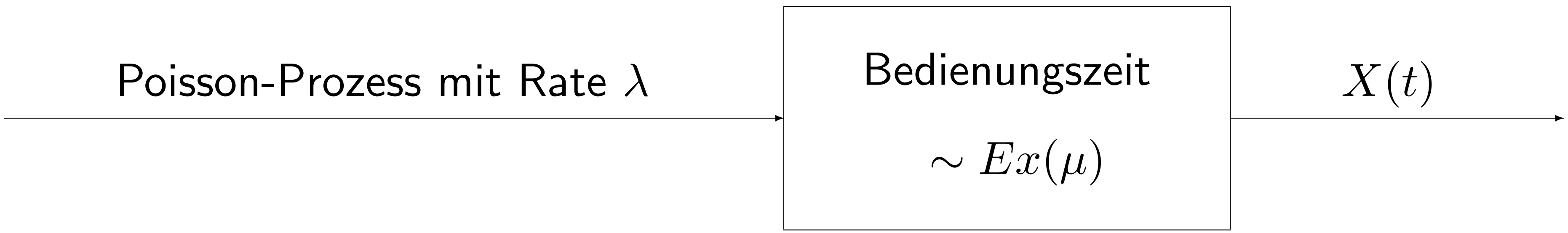
Für die Intensitäten gilt also

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i+1} &= \lambda_i\,, \\ \lambda_{i,i-1} &= \mu_i\,, \\ \lambda_{ij} &= 0 \text{ für } \mid i-j \mid \geq 2\,, \\ \lambda_{ii} &= -(\lambda_i + \mu_i) \end{aligned}$$

- Die explizite Berechnung der Übergangsmatrix $P(t)$ aus Λ ist i.A. nicht möglich.

Spezielle Geburts- und Todesprozesse spielen eine Rolle in der Warteschlangen- und Bedienungstheorie:

- Das Wartesystem M/M/1/∞



Die Anzahl der im System befindlichen Kunden $X(t)$ ist ein spezieller Geburts-Todes-Prozess mit $\lambda_i = \lambda$ und $\mu_i = \mu$.

Für $\lambda < \mu$ existiert die Grenzverteilung p_j:

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = (1-r)r^j, \quad r = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} X(t) = X(\infty)$ geometrisch verteilt mit

$$E(X(\infty)) = \frac{r}{1-r}, \quad Var(X(\infty)) = \frac{r}{(1-r)^2}$$

- Varianten:
  - begrenzte Kapazität N des Warteraums (M/M/1/N)

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda & 0 \le i \le N \\ 0 & i > N \end{cases}$$

  - von der Länge der angetroffenen Warteschlange verursachte Entmutigung, z.B.

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{(i+1)}, \; i = 0, 1, \ldots$$

- Das Wartesystem M/M/s/∞: s Schalter jeweils mit Rate μ

  $X(t)$ Geburts-Todes-Prozess mit

$$\lambda_i = \lambda \quad \text{und} \quad \mu = \begin{cases} \mu i, & i = 1, \ldots, s \\ \mu s, & i = s+1, \ldots \end{cases}$$

  Grenzverteilung existiert für $\lambda < s\mu$.

- Modelle zur Bevölkerungsentwicklung

  Verallgemeinerung des Yule-Prozess mit Geburtsrate $\lambda_i = i\lambda$ und Sterberate $\mu_i = i\mu$

  Für $X(0) = 1$ kann man zeigen:

$$E(X(t)) = \exp((\lambda - \mu)t) \quad (\text{für } \lambda \neq \mu)$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit des Aussterbens } = \begin{cases} 1, & \lambda \leq \mu \\ \frac{\mu}{\lambda}, & \lambda > \mu \end{cases}$$

- Struktur der Pfade von Geburts- und Todesprozessen

  Wahrscheinlichkeit für Verlassen des Zustands i im Intervall $(t, t+h]$:

$$(\lambda_i + \mu_i)h + o(h).$$

  $\Rightarrow$ Exp$(\lambda_i + \mu_i)$-verteilte Verweildauern (analog zum Poisson-Prozess).

  Wahrscheinlichkeit für Zustandsänderung $i \to i+1$: $\lambda_i h + o(h)$

  Wahrscheinlichkeit für Zustandsänderung $i \to i-1$: $\mu_i h + o(h)$

  Unter der Bedingung, dass eine Zustandsänderung stattfindet, erhält man also die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + \mu_i)} \quad \text{Übergang } i \to i+1$$
$$\frac{\mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)} \quad \text{Übergang } i \to i-1$$

- Vorgehen zur Simulation:

  Der aktuelle Zustand sei i. Realisiere eine Exp$(\lambda_i+\mu_i)$-verteilte Zufallsvariable, um die Verweildauer in i zu erhalten. Entscheide dann anhand eines Bernoulli-Experiments mit den obigen Wahrscheinlichkeiten, welcher der zwei möglichen Zustandswechsel eintritt.