Kurze Übersicht zu Kapitel 5
Erneuerungs- und Semi-Markov-Prozesse

Beim Poisson-Prozess und bei (regulären) diskreten Markovprozessen folgt aus der Markoveigenschaft $T_n \sim Ex(\lambda_i)$. Bei Erneuerungs- und Semi-Markov-Prozessen sind beliebige Verteilungen möglich. $\rightarrow$ Verlust der Markoveigenschaft.

5.1 Erneuerungsprozesse

- Definition: Erneuerungsprozess

  Sei $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, nichtnegativer Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F, mit $F(0) < 1$. Dann heißt die Folge $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit

  $$S_0 := 0, \quad S_{n+1} = S_n + T_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

  Erneuerungsprozess. Sei

  $$N(t) = \max_{n \in \mathbb{N}_0} \{n : S_n \leq t\}$$

  die Anzahl von Erneuerungen im Intervall $[0, t]$. Dann heißt $N = \{N(t), t \geq 0\}$ Erneuerungszählprozess, oft auch einfach Erneuerungsprozess.

- Beispiele:

  – Zuverlässigkeitstheorie: Ein bestimmter Bestandteil eines technischen Gerätes werde sofort nach seinem Ausfall durch ein neues Gerät ersetzt. Die $T_1, T_2, \ldots$ sind dann die Lebensdauern des ersten, zweiten, ... Gerätes. $N(t)$ gibt die Anzahl von Erneuerungen bis t an.

- Klinische Studien, Survivalanalyse: In klinischen Studien sind $T_1, T_2, \ldots$ z.B. die Zeitdauern nach denen epileptische Anfälle, Rückfälle, etc. auftreten. Ein wichtiger Spezialfall ist die Survival- oder Überlebenszeitanalyse: Betrachtet wird für (homogene) Gruppen von Patienten die Überlebenszeit.

- Beispiele für Lebensdauerverteilungen F (wir betrachten nur stetige Lebensdauern mit Dichte f):
  - Weibull–Verteilung, Gammaverteilung, Log-Normalverteilung
  - Exponentialverteilung Ex(λ) ergibt den Spezialfall des Poisson-Prozesses.

- Statistische Inferenz:
  - $F(t)$ bzw. $f(t)$ nonparametrisch durch die empirische Verteilungsfunktion bzw. Kerndichteschätzer schätzen.
  - Parametrische Verteilungen $F(t;\theta)$: θ mit ML schätzen.
  - Beim Vorliegen von Zensierung: Lebensdauer- und Ereignisanalyse.

5.2 Semi-Markov-Prozesse

- Pfadstruktur wie bei Markov-Prozessen:

$Y_n = X(S_n)$	Zustand nach dem n-ten Übergang, $n = 0, 1, \ldots$
T_{n+1}	Verweildauer im Zustand Y_n
S_n	Zeitpunkt des n-ten Übergangs.

- Definition: Markov-Erneuerungsprozess , Semi-Markov-Prozess

  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen mit abzählbarem Zustandsraum.

  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sei eine Folge nichtnegativer Zufallsvariablen mit $0 =: S_0 \leq S_1 \leq \ldots$

  Der Prozess $(Y, S) = \{(Y_n, S_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ heißt Markov-Erneuerungsprozess $:\Leftrightarrow$ $\forall\ t, s, s_{n-1}, \ldots \in \mathbb{R}_+$, $\forall j, i_n, \ldots, i_0$ gilt

$$\begin{aligned} & P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, ..., Y_0 = i_0, S_n = s, S_{n-1} = s_{n-1}, \ldots) \\ = \quad & P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | Y_n = i). \end{aligned}$$

Ist (Y, S) ein Markov-Erneuerungsprozess, so heißt $X = \{X(t), t \geq 0\}$ der zu (Y, S) gehörige Semi-Markov-Prozess :$\Leftrightarrow$

$$X(t) = Y_n \quad \text{für} \quad S_n \leq t < S_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Interpretation: Die Folge $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ der Zustände bildet eine Markov-Kette, während die Ereigniszeitpunkte S_n, durch einen separaten Wahrscheinlichkeitsmechanismus beschrieben werden. Die Markov-Eigenschaft gilt nur noch bei Bedingen auf $X(S_n) = i$, d.h. bedingt auf $t = S_n$, nicht jedoch für beliebige Zeitpunkte.

- Definition: Homogener Semi-Markov-Prozess
  Gilt unabhängig von n

$$P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | Y_n = i) = P(Y_1 = j, T_1 \leq t | Y_0 = i) =: Q_{ij}(t),$$

  so heißt der Semi-Markov-Prozess homogen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $Q_{ij}(t)$ heißen Semi-Markov-Übergangswahrscheinlichkeiten, $Q(t) = (Q_{ij}(t))$ Semi-Markov-Übergangsmatrix.

- Im Folgenden betrachten wir nur homogene Semi-Markov-Prozesse.

- Struktur von Semi-Markov-Prozessen:

  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ bildet eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in S}, \qquad q_{ij} = \lim_{t \to \infty} Q_{ij}(t).$$

  Die bedingte Verteilungsfunktion der Verweildauer T_{n+1} bedingt auf den Übergang $Y_n = i$ und $Y_{n+1} = j$ ist

$$G_{ij}(t) = P(T_{n+1} \leq t \mid Y_n = i, Y_{n+1} = j) = \frac{Q_{ij}(t)}{q_{ij}}.$$

  (Für $q_{ij} = 0$ setze $G_{ij}(t) = 0$.)

- Algorithmus zur Simulation von Semi-Markov-Prozessen:

  1. Simuliere die Markov-Kette Y gemäß Übergangsmatrix $(q_{ij})_{i,j \in S}$
  2. Simuliere <u>dann</u> die Verweildauern T_n gemäß den Verteilungen $G_{ij}(t)$ (abhängig von j).

- Markov-Ketten, Markov-Prozesse, Erneuerungsprozesse als Spezialfälle:
  - Ein Erneuerungsprozess ergibt sich mit $S = \{1\}$ und $Q_{11}(t) = F(t)$.
  - Eine Markov-Kette erhält man durch die Wahl

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ q_{ij} & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

    $\Rightarrow T_1 = T_2 = ... = 1$ deterministische Verweildauern.
  - Mit $G_{ij}(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t) \quad t \geq 0$ und

$$q_{ii} = \begin{cases} 0, & i \text{ stabil} \\ 1, & i \text{ absorbierend} \end{cases}$$

    erhält man einen Markov-Prozess. Umgekehrt ist jeder reguläre Markov-Prozess ein Semi-Markov-Prozess.

- Analog zu Markov-Prozessen gibt es einen Grenzwertsatz für Semi-Markov-Prozesse, wobei für die stationäre Verteilung die stationäre Verteilung der eingebetteten Markovkette statt mit $\frac{1}{\lambda_i}$ mit den Erwartungswerten der Verweildauern in i gewichtet wird.

- Statistische Inferenz:

  Im Vergleich zu Markov-Prozess sind statt Parametern λ_i der Exponentialverteilungen die entsprechenden Verweildauern parametrisch oder nichtparametrisch zu schätzen sowie die Übergangsmatrix Q der eingebetteten Markovkette.

  Moderne Inferenzverfahren benutzen das Instrumentarium von Zählprozessen (Kapitel 7).