Aufgabe 1

Sei $\{W(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$ ein Wiener Prozess. Welche der folgenden Prozesse bilden ebenfalls einen Wiener Prozess?

a) $X_1(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct) \quad$ mit $c > 0$

b) $X_2(t) = \sqrt{t} W(1)$

c) $X_3(t) = 3W(t^2)$

Aufgabe 2

Sei $\{W(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$ ein Wiener Prozess und sei $0 \leq s < t$. Verifizieren sie unter Verwendung der gemeinsamen Verteilung von $(W(s), W(t))'$ die bedingten Verteilungen

a) $W(t) \mid W(s) = a \;\sim\; N\left(a, \sigma^2(t-s)\right)$

b) $W(s) \mid W(t) = b \;\sim\; N\left(\frac{s}{t} b, \sigma^2 \frac{s}{t}(t-s)\right) \quad .$

Interpretieren Sie Erwartungswert und Varianz der beiden bedingten Verteilungen.

Aufgabe 3

Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Fische, die ein Angler aus einem See mit großem Fischbestand fischt, einem homogenen Poisson-Prozess folgt, wobei zwei gefangene Fische pro Stunde zu erwarten sind.

(a) Wie lange muss der Angler im Mittel warten, bis er 8 Fische gefangen hat?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Angler an einem bestimmten Tag zwischen 8 und 12 Uhr mehr als zwei Fische fängt?

(c) Wie lange muss der Angler warten, bis er mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Fisch gefangen hat?