

Aufgabe 1

Gegeben seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen Z_t , $t \in \mathbb{N}_0$, mit $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ und $\text{Var}(Z_t) = 1$. Der stochastische Prozess $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ sei wie folgt definiert:

$$X_t = \frac{1}{2}(Z_t - Z_{t-1})$$

- (a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_t)$, $\text{Var}(X_t)$ und $\text{Cov}(X_t, X_{t-1})$.
- (b) Berechnen Sie Kovarianz- und Korrelationsfunktion von X_t und zeigen Sie damit, dass X_t schwach stationär ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum $S = \{A, B\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

Die Startverteilung sei gegeben durch $P(X_0 = A) = 0.2$ und $P(X_0 = B) = 0.8$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- (a) $P(X_3 = A)$
- (b) $P(X_3 = A | X_0 = A)$
- (c) $P(X_3 = A | X_1 = B, X_0 = A)$
- (d) $P(X_3 = A | X_2 = B, X_1 = B, X_0 = A)$
- (e) $P(X_6 = A | X_3 = A)$
- (f) $P(X_3 = A | X_6 = A)$

Aufgabe 3

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum

$S = \{A, B, C, D\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{cccc} & A & B & C & D \\ \left(\begin{array}{cccc} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

- (a) Zeichnen Sie den zugehörigen Markov-Graphen.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in genau drei Schritten vom Zustand C in den Zustand A zu gelangen?
- (c) **Klassifizierung nach Erreichbarkeit**
 - (i) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von X .
 - (ii) Teilen Sie diese in abgeschlossene, offene und irreduzible Klassen ein.
 - (iii) Gibt es absorbierende Zustände?
- (d) **Klassifizierung nach Rückkehrverhalten**
 - (i) Welche Zustände von X sind rekurrent?
 - (ii) Welche Zustände von X sind transient?
 - (iii) Welche Zustände von X sind periodisch?
- (e) Bringen Sie \mathbf{P} in die kanonische Form.