Aufgabe 1

Unter den Affen im Zoo ist ein Magen-Darm-Virus ausgebrochen, deswegen kommt jeden Morgen der Tierarzt ins Affengehege. Er untersucht jeden Affen einzeln und stellt fest, ob der Affe gesund (G) oder krank (K) ist.

Der Arzt nimmt zunächst an, dass die Folge der Zustände einer homogenen Markov-Kette $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ mit dem Zustandsraum $S = \{G, K\}$ folgt. Für den Übergang von gesund zu krank nimmt der Arzt die Wahrscheinlichkeit a an, für den Übergang von krank zu gesund die Wahrscheinlichkeit $4a$.

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ für $\{X_t\}$ auf. Für welche Werte von a ist $\boldsymbol{P}$ wohldefiniert?

b) Gegeben ein Affe ist heute krank – wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er übermorgen gesund ist?

c) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_G, \pi_K)$ von X_t. Wie lässt sich $\boldsymbol{\pi}$ interpretieren? Welche Aussage über das Rückkehrverhalten jedes einzelnen Zustandes lässt sich aus dem Ergebnis ableiten?

d) Der Arzt sammelt eine Woche lang die Daten von 50 Affen. Für die Anzahl der Übergänge zwischen den Zuständen erhält er die folgende Tabelle:

		t	
		G	K
$t-1$	G	234	47
	K	48	21

Stellen Sie mit Hilfe dieser Kreuztabelle die Likelihood für den Parameter a auf und schätzen Sie den Parameter a.

e) Der Arzt ist sich nicht sicher, dass die Annahme der Stationarität erfüllt ist. Beschreiben Sie kurz, wie Sie generell vorgehen würden, um realisierte Pfade einer Markov-Kette auf Stationarität zu überprüfen.

f) Simulieren Sie auf Basis der geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten aus d) einen Datensatz und führen Sie eine entsprechende Überprüfung der Annahme aus e) in R durch.