Aufgabe 1

Es soll ein Metropolis - Algorithmus konstruiert werden, der gegen die folgende diskrete Verteilung konvergiert:

$$\boldsymbol{\pi}(x) \;=\; (0.3, 0.1, 0.6)\;.$$

a) Berechnen Sie die Akzeptanzwahrscheinlichkeiten $\alpha(x, y)$ bei Verwendung der Vorschlagsdichte

$$Q = \begin{pmatrix} 1-2q & q & q \\ q & 1-2q & q \\ q & q & 1-2q \end{pmatrix}\;, \quad \text{mit } q \in (0, 0.5)$$

sowie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ der sich daraus ergebenden Markov-Kette.

b) Vergewissern Sie sich, dass $\boldsymbol{P}$ tatsächlich $\boldsymbol{\pi}(x)$ als stationäre Verteilung hat.

c) Simulieren Sie die resultierende Markov-Kette in R. Welche Werte von q erscheinen Ihnen als besonders günstig?

d) Geben Sie eine nicht-triviale (d.h. nicht diagonale) Vorschlagsdichte Q an, bei der die entstehende Markov-Kette nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 2

Auf einem Radiosender läuft rund um die Uhr Musik M, die gelegentlich von Werbeblöcken W oder Nachrichten N unterbrochen werden. Betrachten Sie den (homogenen) stochastischen Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ des Radioprogramms mit den Zuständen M, W und N in stetiger Zeit. Die Verweildauern in den einzelnen Zuständen seien exponentialverteilt mit den Parametern λ_M, λ_W und λ_N.

(a) Um welche Art von Prozess handelt es sich bei X?

(b) Unter welchen Voraussetzungen an die Parameter λ_M, λ_W und λ_N besitzt der Prozess X eine stationäre Verteilung?

Der Radiosender versucht sein Programm Hörer-freundlich zu gestalten. Manchmal kommt vor einer Nachrichtensendung noch Werbung, niemals aber kommt ein Werbeblock im Anschluss an Nachrichten.

(c) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen der eingebetteten Markov-Kette $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit den drei Zuständen M, W und N.

(d) Stellen Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ der eingebetteten Markov-Kette Y auf, wenn $p_{MW} = 0.9$ und $p_{WN} = 0.5$ gilt. Berechnen Sie außerdem die stationäre Verteilung $\nu = (\nu_M, \nu_W, \nu_N)$ von Y.

Um den Sender zu finanzieren, muss ein Viertel der Sendezeit mit Werbung belegt werden, gleichzeitig sollen die Musikeinspielungen 70% der Sendezeit einnehmen. Die Länge der Musiksequenzen legt der Sender auf durchschnittlich 20 Minuten fest.

(e) Geben Sie die entsprechende stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_M, \pi_W, \pi_N)$ von X an. Wie müssen die Parameter λ_W und λ_N gewählt werden?

(f) Ein Zuschauer schaltet das Radio ein, als gerade Werbung läuft. Wie lange wird es voraussichtlich dauern, bis es im regulären Programm weitergeht?