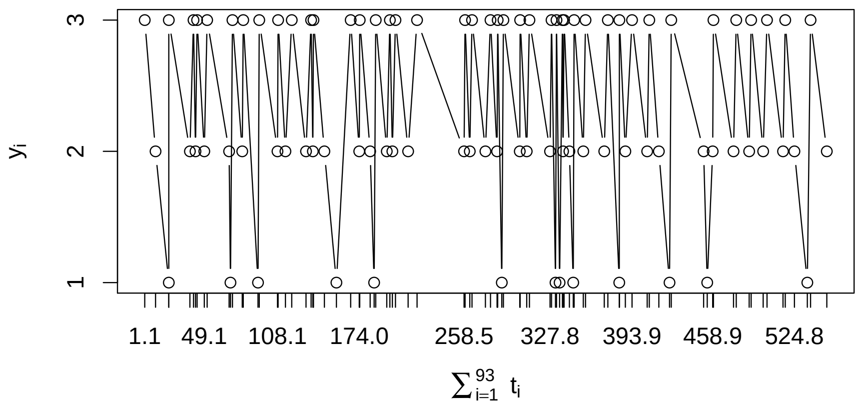
Aufgabe 1

Der Schlaf des Menschen lässt sich in drei verschiedene Phasen einteilen:

Kodierung	Beschreibung
1	REM
2	Non-REM
3	Wach

Gehen Sie von Wertepaaren (y_i, t_i) für $i = 1, \ldots, 93$ aus, die den Schlafverlauf eines 46-jährigen Mannes beschreiben, wobei t_i die Verweildauer im i-ten Zustand (in Minuten) bezeichne. Dabei wechselt der Schlafverlauf 13-mal ausgehend von der REM-Phase, 37-mal ausgehend von der Non-REM-Phase und 42-mal aus der Wach-Phase. Im Folgenden soll die Zeitreihe als (Realisation eines diskreten Markov-Prozesses aufgefasst werden. Eine graphische Visualisierung der Aufzeichnungen ergibt folgendes Bild des Schlafverlaufs.



Eine genauere Aufschlüsselung der Daten ergibt folgende Erkenntnisse:

- Summierte Dauer γ_i des Aufenthalts in Zustand i:

$$\gamma_1 = 79.8 \qquad \gamma_2 = 382.5 \qquad \gamma_3 = 88.6$$

- Anzahl der Wechsel von Zustand i (Zeile) zu Zustand j (Spalte): $\begin{pmatrix} & 1 & 12 \\ 8 & & 29 \\ 5 & 37 & \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Likelihood für die Parameter der Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ und die der Intensitätsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ unter der Annahme, dass der gegebene Pfad vollständig ist.

b) Bestimmen Sie ML-Schätzer für alle Parameter in $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{\Lambda}$.

c) Schätzen Sie außerdem die stationäre Verteilung des diskreten Markov-Prozesses und interpretieren Sie diese.

Aufgabe 2

Ein Eisverkäufer möchte das Kaufverhalten seiner Kunden untersuchen. Von Interesse ist die Anzahl an Eis, welches die Kunden in einem bestimmten Zeitraum kaufen.

Diese Anzahl wird als stochastischer Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ beschrieben, wobei S_n den Zeitpunkt in Minuten bezeichnet, zu dem das n-te Eis gekauft wird. Die Zeit zwischen dem $(n-1)$-ten und dem n-ten Eiskauf wird mit T_n bezeichnet. Es wird angenommen, dass die Zwischenzeiten T_n unabhängig und identisch verteilt sind mit der Verteilungsfunktion:

$$F(t) = 1 - \exp\{-at^{b/2}\} \qquad \text{für} \quad t \geq 0 \quad \text{und} \quad a > 0,\ b > 0\ .$$

a) Welcher Typ eines stochastischen Prozesses liegt hier vor? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die zu $F(t)$ gehörige Hazardrate.

c) Für welche Wahl der Parameter a und b ist der Prozess ein Markov-Prozess? Um welchen Spezialfall eines Markov-Prozesses handelt es sich?

d) Betrachten Sie nun den Prozess $N(t)$, der alle Eiskäufe zählt, mit $b = 2$ fest und konstant.

   Wie ist die Anzahl der Eiskäufe verteilt? Wie ist die Anzahl der Eiskäufe verteilt, falls $t \to \infty$ geht? Wie lässt sich insbesondere der Erwartungswert der Grenzverteilung interpretieren?

e) An heißen Sommertagen wird durchschnittlich ein Eis in zwei Minuten gekauft. Bestimmen Sie approximativ die innerhalb von 8 Stunden zu erwartende Anzahl an Eiskäufen. Geben Sie zusätzlich ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für die Anzahl der zu erwartenden Eiskäufe in 8 Stunden an. (Dabei gilt weiterhin $b = 2$.)