Die folgende Aufgabe stellt ein Zusatzsangebot zum Vertiefen der Veranstaltungsinhalte dar und wird nicht explizit im Übungsbetrieb besprochen.
Eine entsprechende Lösung wird nach Ablauf der Bearbeitungsfrist zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1

Schreiben Sie in R eine Funktion, die die Pfade der diskreten einfachen Irrfahrt auf der Geraden für gegebene Wahrscheinlichkeiten p, q und r (mit $p+q+r=1$) sowie gegebene Länge n simuliert und visualisiert. Testen Sie Ihr Programm mit verschiedenen Kombinationen für p, q und r und visualisieren Sie die Pfade. Wie müsste das Programm verändert werden, um eine diskrete Irrfahrt mit absorbierenden Schranken zu simulieren?

Aufgabe 2

Modifizieren Sie Ihre Funktion aus Aufgabe 1 derart, dass anstelle der konstanten Schrittweiten und Zeitintervalle von 1 variablere Sprünge Δx sowie Zeitintervalle Δt zugelassen sind. Benutzen Sie dazu die Parametrisierung

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{c}} \qquad \text{und} \qquad \Delta t = \frac{1}{c}\ ,$$

wobei σ und c bekannte Parameter sind, die Sie mit Ihrer Funktion variieren können. Visualisieren Sie die Pfade insbesondere für $p = q = \frac{1}{2}$ und $c \longrightarrow \infty$. Welche Art von stochastischem Prozess ergibt sich in diesem Fall?

Aufgabe 3

Eine Anwendung eines Wiener Prozesses ist das sogenannte *Black-Scholes-Modell* zur Modellierung von Aktienkursen. Es ist gegeben als:

$$\log P(t) = \log P(0) + rt + W(t),$$

wobei $P(t)$ und $P(0)$ einen Aktienkurs zu den Zeitpunkten t und 0 bezeichnen; $r > 0$ ist ein zeitkonstanter Zinssatz und $\{W(t), t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess mit $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$. Der Parameter $\sigma > 0$ wird als *Volatilität* bezeichnet.

Im Folgenden konzentrieren wir uns hier auf den stochastischen Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$, der sich als Spezialfall mit $\log P(0) = 0$ aus dem Black-Scholes-Modell ergibt:

$$X(t) = r\,t + W(t)\ .$$

Der Einfachheit halber wird $X(t)$ nur zu den äquidistanten Zeitpunkten $t_1 = 1$, $t_2 = 2, \ldots, t_n = n$ betrachtet.

a) Welchen (einfachen) stochastischen Prozess verstetigt ein Wiener Prozess und erklären Sie kurz das Vorgehen dabei.

b) Wie lautet die Verteilung der Zuwächse von $X(t)$?
Sind die Zuwächse von $X(t)$ stationär? Begründen Sie.

c) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X(t_1), \ldots, X(t_n)$. Ist der Prozess $X(t)$ selbst stationär? Begründen Sie.

d) Handelt es sich bei $X(t)$ ebenfalls um einen Wiener Prozess? Begründen Sie.

   Hinweis: Sie müssen die Stetigkeit nicht nachweisen.

e) Wie lässt sich ein Pfad von $X(t)$ auf dem Intervall $[0, t^*]$ simulieren?.

   Hinweis: Beschreiben Sie das Vorgehen in eigenen Worten, als Pseudoalgorithmus oder geben Sie R-Code an; Sie können die Volatitlität σ, den Zinssatz r und t^* als feste Parameter betrachten und annehmen, dass $X(0) = 0$ ist.