Die folgende Aufgabe stellt ein Zusatzsangebot zum Vertiefen der Veranstaltungsinhalte dar und wird nicht explizit im Übungsbetrieb besprochen.
Eine entsprechende Lösung wird nach Ablauf der Bearbeitungsfrist zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1

Sei $W = \{W(t), t \geq 0\}$ ein Wiener Prozess.

a) Ist W schwach stationär? Ist W streng stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Betrachten Sie nun den Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \begin{cases} \frac{W(t)}{\sqrt{t}} & t \geq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Ist X schwach stationär? Handelt es sich bei X ebenfalls um einen Wiener Prozess? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für einen Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ der folgende Zusammenhang gilt und interpretieren Sie diesen:

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) \; = \; \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \quad \text{für} \quad s < t \, .$$

Aufgabe 3

Gegeben sei ein homogener Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ mit der Rate λ.

a) Wie sind die Zwischenzeiten zwischen zwei Ereignissen für den gegebenen Prozess verteilt? Um was für einen Prozess würde es sich handeln, wenn man diese Verteilungsannahme verallgemeinert?

b) Wie lässt sich der Poisson-Prozess $N(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, s]$ mit $s \geq 0$ bei gegebener Rate λ simulieren? Beschreiben Sie das Vorgehen in eigenen Worten.

c) Ist der Prozess $M(t) = N(t) - \lambda t$ schwach stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Wie lange dauert es unter Annahme des obigen Poisson-Prozesses in Erwartung, bis 20 Ereignisse eingetreten sind?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 21te Ereignis spätestens zum Zeitpunkt $s + h$ eintritt, wenn zum Zeitpunkt s genau 20 Ereignisse eingetreten sind? Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich für $h \to 0$ und wie lässt sich dieser Grenzfall in Hinblick auf die Annahme eines Poisson-Prozesses deuten?