Die folgenden Aufgaben stellen ein Zusatzsangebot zum Vertiefen der Veranstaltungsinhalte dar und werden nicht explizit im Übungsbetrieb besprochen.
Eine entsprechende Lösung wird nach Ablauf der Bearbeitungsfrist zur Verfügung gestellt.

### Aufgabe 1

Ein Gebrauchtwagenhändler bietet seinen Kunden einen kostenlosen Reparaturservice, wenn sie sich einen Sender in ihr Auto einbauen lassen, der ihm jeden Tag einmal den Zustand ihres Kfz übermittelt. Erfasst werden die Zustände $O$ (alles in Ordnung) und $M$ (kleine Mängel). Die Kunden werden dann informiert, falls ihr Fahrzeug nicht in Ordnung ist. Die Folge der Zustände eines Autos kann als homogene Markov-Kette 1.Ordnung angenommen werden.

Die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}_2$ ist gegeben zu

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} O & M \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} p_{OO} & p_{OM} \\ p_{MO} & p_{MM} \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Der Händler ist nun daran interessiert die unbekannten Parameter zu schätzen. Dazu sammelt er die Daten von 10 Autos über einen Zeitraum von 30 Tagen und stellt die Übergänge in der folgenden Kreuztabelle dar.

| | | $t+1$ | |
|---|---|---|---|
| | | O | M |
| $t$ | O | 126 | 84 |
| | M | 16 | 64 |

Stellen Sie mit dieser Tabelle die (bedingte) Likelihood auf und bestimmen Sie die ML - Schätzer für $p_{OO}$, $p_{OM}$, $p_{MO}$ und $p_{MM}$.
**Hinweis:** Eine analytische Herleitung der ML - Schätzer ist nicht notwendig.

b) Berechnen Sie unter Verwendung der in a) geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten die Stationäre Verteilung $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_O, \hat{\pi}_M)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Nachdem Beschwerden von Kunden auftreten, lässt der Verkäufer zusätzlich noch den Zustand $U$ (fahruntüchtig) erfassen. Nachdem er die obigen Autos weitere 30 Tage beobachtet hat, schätzt er die folgende Übergangsmatrix

$$\hat{\boldsymbol{P}}_3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} O & M & U \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ M \\ U \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

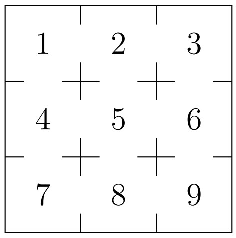
c) Zeichnen Sie den Markov-Graphen zu $\hat{\boldsymbol{P}}_3$.

d) Teilen Sie den Zustandsraum in Äquivalenzklassen ein und schreiben Sie die Übergangsmatrix $\hat{\boldsymbol{P}}_3$ in die kanonische Form. Nennen Sie 2 Vorteile dieser Darstellung.

e) Handelt es sich bei $\hat{\boldsymbol{P}}_3$ um die geschätzte Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ einer eingebetteten Markov-Kette in einem regulären diskreten homogenen Markov-Prozess 1. Ordnung? Begründen Sie.

## Aufgabe 2

Ein Hamster wird in das folgende Labyrinth gesetzt:




Er bewegt sich zufällig durch die Räume und bei $k$ Möglichkeiten zum Verlassen eines Raumes wählt er mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine dieser Möglichkeiten.

Sei $S = \{1, \dots, 9\}$ der Zustandsraum der homogenen Markov-Kette $X = \big\{X_n, n \in \mathbb{N}\big\}$, die angibt, in welchem Raum sich der Hamster befindet.

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Markov-Graphen.

b) Geben Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ dieser Markov-Kette an.

c) Ist $X$ irreduzibel?

d) Ist $X$ aperiodisch?

e) Welche Zustände von $X$ sind rekurrent, welche transient?

In Raum 4 werden jetzt Sonnenblumenkerne – die Lieblingsspeise des Hamsters – gelegt. Demzufolge bewegt sich der Hamster nicht mehr aus Raum 4 weg, wenn er einmal dort angekommen ist. Die Folge der Räume, in denen sich der Hamster befindet, wird weiterhin als Markov-Kette aufgefasst.

f) Geben Sie die Übergangsmatrix für diese modifizierte Markov-Kette an.

g) Ist die modifizierte Markov-Kette irreduzibel?

h) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient?