Aufgabe 1

Schreiben Sie in R eine Funktion, die die Pfade der diskreten einfachen Irrfahrt auf der Geraden für gegebene Wahrscheinlichkeiten p, q und r (mit $p+q+r=1$) sowie gegebene Länge n simuliert und visualisiert. Testen Sie Ihr Programm mit verschiedenen Kombinationen für p, q und r und visualisieren Sie die Pfade. Wie müsste das Programm verändert werden, um eine diskrete Irrfahrt mit absorbierenden Schranken zu simulieren?

Lösung Aufgabe 1

Simulation

Parameter: Länge des Pfades, Wahrscheinlichkeiten der Zuwächse

Rückgabe: `data.frame` aus 2 Spalten für Zeitpunkte und Zustände

Simulationsschritte:

1. Setze $X_0 = 0$
2. Für $t = 1, \dots, n$:
   - Ziehe Z_t zufällig aus der Dreipunktverteilung
   - berechne $X_t = X_{t-1} + Z_t$

Absorbierende Schranken

Zusätzliche Argumente für beide Schranken und in jeder Iteration Abfrage, ob eine der Schranken erreicht.

Aufgabe 2

Modifizieren Sie Ihre Funktion aus Aufgabe 1 derart, dass anstelle der konstanten Schrittweiten und Zeitintervalle von 1 variablere Sprünge Δx sowie Zeitintervalle Δt zugelassen sind. Benutzen Sie dazu die Parametrisierung

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{c}} \qquad \text{und} \qquad \Delta t = \frac{1}{c} \, ,$$

wobei σ und c bekannte Parameter sind, die Sie mit Ihrer Funktion variieren können. Visualisieren Sie die Pfade insbesondere für $p = q = \frac{1}{2}$ und $c \longrightarrow \infty$. Welche Art von stochastischem Prozess ergibt sich in diesem Fall?

Lösung Aufgabe 2

Simulation

Modifikation der Funktion aus Aufgabe 1:

- $r = 0$ und damit braucht man nur noch p, da $q = 1 - p$.
- Durch Parametrisierung von

$$\Delta t = \frac{1}{c} \qquad \text{und} \qquad \Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{c}}$$

sichert man, dass

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \frac{\frac{\sigma^2}{c}}{\frac{1}{c}} = \sigma^2$$

konstant ist.

Aufgabe 3

Eine Anwendung eines Wiener Prozesses ist das sogenannte *Black-Scholes-Modell* zur Modellierung von Aktienkursen. Es ist gegeben als:

$$\log P(t) = \log P(0) + rt + W(t),$$

wobei $P(t)$ und $P(0)$ einen Aktienkurs zu den Zeitpunkten t und 0 bezeichnen; $r > 0$ ist ein zeitkonstanter Zinssatz und $\{W(t), t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess mit $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$. Der Parameter $\sigma > 0$ wird als *Volatilität* bezeichnet.

Im Folgenden konzentrieren wir uns hier auf den stochastischen Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$, der sich als Spezialfall mit $\log P(0) = 0$ aus dem Black-Scholes-Modell ergibt:

$$X(t) = r\,t + W(t)\ .$$

Der Einfachheit halber wird $X(t)$ nur zu den äquidistanten Zeitpunkten $t_1 = 1$, $t_2 = 2, \ldots, t_n = n$ betrachtet.

a) Welchen (einfachen) stochastischen Prozess verstetigt ein Wiener Prozess und erklären Sie kurz das Vorgehen dabei.

b) Wie lautet die Verteilung der Zuwächse von $X(t)$?
Sind die Zuwächse von $X(t)$ stationär? Begründen Sie.

c) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X(t_1), \ldots, X(t_n)$. Ist der Prozess $X(t)$ selbst stationär? Begründen Sie.

d) Handelt es sich bei $X(t)$ ebenfalls um einen Wiener Prozess? Begründen Sie.

   Hinweis: Sie müssen die Stetigkeit nicht nachweisen.

e) Wie lässt sich ein Pfad von $X(t)$ auf dem Intervall $[0, t^*]$ simulieren?.

   Hinweis: Beschreiben Sie das Vorgehen in eigenen Worten, als Pseudoalgorithmus oder geben Sie R-Code an; Sie können die Volatitlität σ, den Zinssatz r und t^* als feste Parameter betrachten und annehmen, dass $X(0) = 0$ ist.

Lösung Aufgabe 3

a) Ein Wiener Prozess verstetigt eine symmetrische diskrete Irrfahrt, wobei die Zeitdistanz zwischen den einzelnen Sprüngen gegen 0 geht.

b) Verteilung der Zuwächse von $X(t)$:
Betrachte Zuwächse $X(t+s) - X(t)$ mit Zeitachsen $t \geq 0$ und Zeitdifferenz $s > 0$.

$$X(t+s)-X(t) = r(t+s)+W(t+s)-rt-W(t) = rs + \underbrace{W(t+s) - W(t)}_{\text{Nach Axiom Zuwachs des Wiener-Prozess } \sim N(0,\sigma^2 s)}\ .$$

Daher gilt für Erwartungswert des Zuwachses

$$\mathbb{E}(X(t+s) - X(t)) = rs\ ,$$

und Varianz

$$\mathrm{Var}(X(t+s) - X(t)) = \mathrm{Var}(W(t+s) - W(t)) = \sigma^2 s$$

und somit gilt für die Verteilung der Zuwächse

$$X(t+s) - X(t) \sim N(rs, \sigma^2 s) ,$$

da sie unabhängig von t ist, sind die Zuwächse stationär.

c) In einem Wiener-Prozess gilt für die gemeinsame Verteilung mit $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$:

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \right) .$$

Damit gilt dann im allgemeinen Black-Scholes-Modell

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt_1 + W(t_1) \\ rt_2 + W(t_2) \\ \vdots \\ rt_n + W(t_n) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} rt_1 \\ rt_2 \\ \vdots \\ rt_n \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \right) .$$

und mit äquidistanten Zeitpunkten

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} r \\ 2r \\ \vdots \\ nr \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \right) .$$

Die Transformation verschiebt somit nur den Erwartungswert des Prozesses (*Wiener-Prozess mit Trend*)

$X(t)$ ist nicht stationär, da sowohl Erwartungswert ($\mathbb{E}(X(t)) = rt$) als auch Varianz ($\mathrm{Var}(X(t)) = \sigma^2 t$)von Zeitachse t abhängen.

d) Nachprüfen der Axiome für Wiener Prozess:

(W4) Stetigkeit gegeben laut Angabe

(W3) $X(0) = r \cdot 0 + W(0) = 0 + 0 = 0$

(W1) gezeigt in a)

(W2) Unabhängigkeit von Zuwächsen: Im Wiener-Prozess sind nicht überlappende Zuwächse unabhänging, d.h es gilt

$$0 \le t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \ : \quad \mathrm{Cov}(W(t_2) - W(t_1), W(t_4) - W(t_3)) = 0 \, .$$

Damit gilt hier

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(X(t_2) - X(t_1), X(t_4) - X(t_3)) \\ &= \mathrm{Cov}(r(t_2 - t_1) + W(t_2) - W(t_1), r(t_4 - t_3) + W(t_4) - W(t_3)) \\ &= \mathrm{Cov}(W(t_2) - W(t_1), W(t_4) - W(t_3)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit handelt es sich bei $X(t)$ um einen Wiener Prozess. Alternativ kann man auch

sagen, dass es sich um keinen Wiener-Prozess handelt, da $\mathbb{E}(X(t+s)-X(t)) = rs \neq 0$,

e) Simulation von $X(t)$: Ziehe zu jedem Zeitpunkt $t \in 1, 2, \ldots t^*$ den Wert des Pfades aus einer Normalverteilung mit Erwartungswert rt und Varianz $\sigma^2 t$