Aufgabe 1

Sei $W = \big\{W(t), t \geq 0\big\}$ ein Wiener Prozess.

a) Ist W schwach stationär? Ist W streng stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Betrachten Sie nun den Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \begin{cases} \frac{W(t)}{\sqrt{t}} & t \geq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Ist X schwach stationär? Handelt es sich bei X ebenfalls um einen Wiener Prozess? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung Aufgabe 1

a) Aus den Axiomen des Wiener Prozesses folgt: $W(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$, also $\text{Var}(W(t)) = \sigma^2 t$.
$\Longrightarrow$ Die Varianz hängt von t ab, deswegen ist $W(t)$ nicht schwach stationär.
$\Longrightarrow$ Damit ist $W(t)$ erst recht nicht streng stationär, da schwache Stationarität Voraussetzung für die strenge Stationarität ist.

b)

$$\begin{aligned}
X(t) &= \frac{W(t)}{\sqrt{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}(X(t)) \;=\; \mathbb{E}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right) = 0 \\
\text{Var}(X(t)) &= \text{Var}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right) \;=\; \frac{1}{t}\,\text{Var}(W(t)) \;=\; \frac{\sigma^2 t}{t} \;=\; \sigma^2 \\
\text{Cov}(X(t), X(t+h)) &= \text{Cov}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\,,\, \frac{W(t+h)}{\sqrt{t+h}}\right) \qquad \text{für } h > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{t+h}}\,\text{Cov}\left(W(t)\,,\, W(t+h)\right) \\
&= \frac{\sigma^2 t}{\sqrt{t^2 + th}}
\end{aligned}$$

Da die Kovarianz $\text{Cov}(X(t), X(t+h))$ von der Zeit t und nicht nur von der Zeitdifferenz h abhängt, ist der Prozess $X(t)$ nicht schwach stationär.
Es kann sich bei $X(t)$ nicht um einen Wiener Prozess handeln, da die Varianz von $W(t)$ von t abhängt, während die Varianz von $X(t)$ über die Zeit konstant ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für einen Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ der folgende Zusammenhang gilt und interpretieren Sie diesen:

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) \; = \; \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \quad \text{für} \quad s < t \, .$$

Lösung Aufgabe 2

Gegeben: Poisson-Prozess mit Rate $\lambda \quad \Longrightarrow \quad N(t) \sim P(\lambda t)$.

$$\begin{aligned}
P(N(s) = k \mid N(t) = n) &= \frac{P(N(s) = k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\
&= \frac{P(N(t) - N(s) = n - k, N(s) = k)}{P(N(t) = n)} \\
&= \frac{P(N(t) - N(s) = n - k) P(N(s) = k)}{P(N(t) = n)} && (1) \\
&= \frac{P(N(t - s) = n - k) P(N(s) = k)}{P(N(t) = n)} && (2) \\
&= \frac{\exp(-\lambda(t-s)) \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} \exp(-\lambda s) \frac{(\lambda s)^k}{k!}}{\exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^k}{n!}} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \; \frac{(t-s)^{n-k} s^k}{t^n} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \; \frac{(t-s)^{n-k} s^k}{t^{n-k} t^k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \; \frac{s^k}{t^k} \; \frac{(t-s)^{n-k}}{t^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

mit (1) wegen unabhängigen Zuwächsen und (2) wegen stationären Zuwächsen.

Interpretation:
Anzahl der eingetretenen Ereignisse zum Zeitpunkt s ist binomialverteilt mit $\pi = \frac{s}{t}$
$\Longrightarrow$ Erwartungswert als Funktion von s ist Gerade mit Steigung $\frac{n}{t}$

$$n\pi \; = \; \frac{s}{t} n \quad \Longrightarrow \quad f(s) \; = \; \frac{n}{t} s$$

- $s \to 0 \implies \pi \to 0 \implies P(N(s) = 0 \mid N(t) = n) \to 1$
- $s \to t \implies \pi \to 1 \implies P(N(s) = n \mid N(t) = n) \to 1$
- Varianz der $B(n, \frac{s}{t})$ Verteilung ist maximal für $\pi = 0.5$, also $s = t/2$

Wissen über $N(s) \mid N(t) = n$ ist umso genauer, je näher s an 0 oder an t liegt.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein homogener Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ mit der Rate λ.

a) Wie sind die Zwischenzeiten zwischen zwei Ereignissen für den gegebenen Prozess verteilt? Um was für einen Prozess würde es sich handeln, wenn man diese Verteilungsannahme verallgemeinert?

b) Wie lässt sich der Poisson-Prozess $N(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, s]$ mit $s \geq 0$ bei gegebener Rate λ simulieren? Beschreiben Sie das Vorgehen in eigenen Worten.

c) Ist der Prozess $M(t) = N(t) - \lambda t$ schwach stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Wie lange dauert es unter Annahme des obigen Poisson-Prozesses in Erwartung, bis 20 Ereignisse eingetreten sind?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 21te Ereignis spätestens zum Zeitpunkt $s + h$ eintritt, wenn zum Zeitpunkt s genau 20 Ereignisse eingetreten sind? Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich für $h \to 0$ und wie lässt sich dieser Grenzfall in Hinblick auf die Annahme eines Poisson-Prozesses deuten?

Lösung Aufgabe 3

a) Die Zwischenzeiten sind exponentialverteilt mit Parameter λ. Eine Verallgemeinerung ist ein (Semi-)Markov-Prozess (Frage ist Vorgriff auf späteren Stoff der Vorlesung).

b) Ziehe aus einer Exponentialverteilung mit Rate λ die Zwischenzeiten T_i solange, bis $\sum_i T_i > s$. Der Poisson-Prozess $N(t)$ ist dann die sich daraus ergebende, rechtsstetige Treppenfunktion mit Sprüngen um 1 zu den Zeitpunkten T_i.

c) Nein, da $\text{Var}(M(t)) = \text{Var}(N(t) - \lambda t) = \text{Var}(N(t)) = \lambda t$ von t abhängig ist (müsste aber konstant sein).

d) 20 Ereignisse entspricht 20 Zwischenzeiten. Damit ist der Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{20} T_i) \overset{iid}{=} 20 \cdot \mathbb{E}(T_i) = 20/\lambda.$$

e) Wieder über Zwischenzeiten:

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{21} T_i \leq s + h \mid \sum_{i=1}^{20} T_i = s) \overset{T_i \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(T_i \leq h) = 1 - \exp(\lambda h).$$

Interpretation für Grenzfall $h \to 0$: Exponent wird 1, Wahrscheinlichkeit wird 0 und entspricht damit genau der Annahme des Poisson-Prozesses, dass keine gleichzeitigen Ereignisse (nämlich das 20te und 21te zum Zeitpunkt s) stattfinden können.