Aufgabe 1

Der Prozess, der zu einer Einweisung einer Person in ein Krankenhaus führt, kann durch eine Markov-Kette 1. Ordnung mit der folgenden Übergangsmatrix für die Zustände $S_0, \dots, S_4$ beschrieben werden:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & 0 & p_{04} \\ 0 & p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} S_0 \text{ gesund} \\ S_1 \text{ leichte Erkrankung, nicht im Krankenhaus} \\ S_2 \text{ schwere Erkrankung, im Krankenhaus} \\ S_3 \text{ krank, im Krankenhaus} \\ S_4 \text{ tot} \end{array}$$

(a) Zeichnen Sie den zur Übergangsmatrix gehörenden Markov-Graphen.

(b) Interpretieren Sie die Vorgaben für $p_{03} = 0$, $p_{12} = 0$, $p_{21} = 0$, $p_{33} = 1$ und $p_{34} = 0$.

(c) Welche Zustände sind offen, welche abgeschlossen?

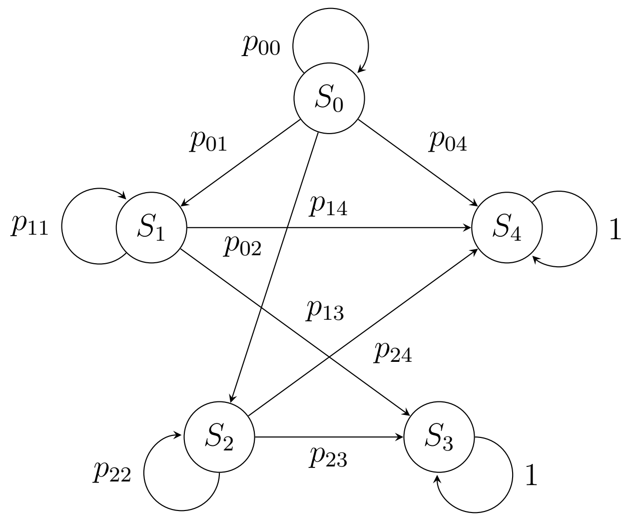
(d) Geben Sie die Klasseneinteilung für die Markov-Kette an und bringen Sie die Übergangsmatrix in die kanonische Form.

(e) Welche Zustände sind absorbierend?

(f) Ist die Markov-Kette irreduzibel?

Lösung Aufgabe 1

(a) Markov-Graph



(b) Interpretationen:
$p_{03} = 0$: Eine gesunde Person kommt nicht ohne Erkrankung ins Krankenhaus
$p_{12} = p_{21} = 0$: entweder liegt eine schwere oder leichte Erkrankung vor; kein Wechsel der Erkrankung möglich.

$p_{33} = 1$ bzw. $p_{34} = 0$: Da nur Einlieferung ins Krankenhaus modelliert wird, ist es unerheblich was nach der Einweisung passiert

(c) Abgeschlossene Zustände:
Kein anderer Zustand ist jeweils von S_3 und S_4 aus erreichbar, S_3 und S_4 sind also beide abgeschlossen.
Alle anderen Teilmengen aus S sind offen.

(d) Klasseneinteilung:
S_3 und S_4 sind jeweils absorbierende Zustände und damit auch irreduzible Teilmengen von S. Die restlichen Zustände lassen sich nicht weiter in irreduzible Mengen aufspalten, sie bilden die *Restmenge* transienter Zustände $\{S_0, S_1, S_2\}$.

Daraus ergibt sich dann die umsortierte Übergangsmatrix:

$$\begin{array}{c} \\ S_4 \\ S_3 \\ S_2 \\ S_1 \\ S_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline p_{24} & p_{23} & p_{22} & 0 & 0 \\ p_{14} & p_{13} & 0 & p_{11} & 0 \\ p_{04} & 0 & p_{02} & p_{01} & p_{00} \end{array} \right) \end{array}$$

(e) S_3 und S_4 sind absorbierend, da sie einzeln abgeschlossen sind, i.e. kein anderer Zustand ist von ihnen aus erreichbar. (Kann man einfach erkennen, wenn Diagonal-Element in $\mathbf{P}$ 1 ist)

(f) Die Markov-Kette ist nicht irreduzibel, da nicht alle Zustände in S wechselseitig erreichbar sind; z.B. ist S_0 von keinen anderen Zustand aus erreichbar.