Aufgabe 1

Ein Gebrauchtwagenhändler bietet seinen Kunden einen kostenlosen Reparaturservice, wenn sie sich einen Sender in ihr Auto einbauen lassen, der ihm jeden Tag einmal den Zustand ihres Kfz übermittelt. Erfasst werden die Zustände O (alles in Ordnung) und M (kleine Mängel). Die Kunden werden dann informiert, falls ihr Fahrzeug nicht in Ordnung ist. Die Folge der Zustände eines Autos kann als homogene Markov-Kette 1.Ordnung angenommen werden.

Die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}_2$ ist gegeben zu

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{array}{c} \\ O \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} O & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{OO} & p_{OM} \\ p_{MO} & p_{MM} \end{pmatrix} \end{array} .$$

a) Der Händler ist nun daran interessiert die unbekannten Parameter zu schätzen. Dazu sammelt er die Daten von 10 Autos über einen Zeitraum von 30 Tagen und stellt die Übergänge in der folgenden Kreuztabelle dar.

		$t+1$	
		O	M
t	O	126	84
	M	16	64

Stellen Sie mit dieser Tabelle die (bedingte) Likelihood auf und bestimmen Sie die ML - Schätzer für p_{OO}, p_{OM}, p_{MO} und p_{MM}.
Hinweis: Eine analytische Herleitung der ML - Schätzer ist nicht notwendig.

b) Berechnen Sie unter Verwendung der in a) geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten die Stationäre Verteilung $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_O, \hat{\pi}_M)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Nachdem Beschwerden von Kunden auftreten, lässt der Verkäufer zusätzlich noch den Zustand U (fahruntüchtig) erfassen. Nachdem er die obigen Autos weitere 30 Tage beobachtet hat, schätzt er die folgende Übergangsmatrix

$$\hat{\boldsymbol{P}}_3 = \begin{array}{c} \\ O \\ M \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & M & U \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} .$$

c) Zeichnen Sie den Markov-Graphen zu $\hat{\boldsymbol{P}}_3$.

d) Teilen Sie den Zustandsraum in Äquivalenzklassen ein und schreiben Sie die Übergangsmatrix $\hat{\boldsymbol{P}}_3$ in die kanonische Form. Nennen Sie 2 Vorteile dieser Darstellung.

e) Handelt es sich bei $\hat{\boldsymbol{P}}_3$ um die geschätzte Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ einer eingebetteten Markov-Kette in einem regulären diskreten homogenen Markov-Prozess 1. Ordnung? Begründen Sie.

Lösung Aufgabe 1

a) Bedingte Likelihood:

$$L(p_{OO}, p_{OM}, p_{MO}, p_{MM} \,|P_1, \ldots, P_{10}) = \prod_{i=1}^{10} p_{OO}^{n_{OO}} p_{OM}^{n_{OM}} p_{MO}^{n_{MO}} p_{MM}^{n_{MM}}$$

Bei der Schätzung benötigt man noch alle Abgänge aus dem jeweiligen Zustand heraus: $n_O = 210$ und $n_M = 80$. Aus der Formelsammlung erhält man dann die ML-Schätzer zu

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{OO}^{\mathrm{ML}} &= \frac{n_{OO}}{n_O} = \frac{126}{210} = 0.6 \\
\hat{p}_{OM}^{\mathrm{ML}} &= \frac{84}{210} = 0.4 \\
\hat{p}_{MO}^{\mathrm{ML}} &= \frac{16}{80} = 0.2 \\
\hat{p}_{MM}^{\mathrm{ML}} &= \frac{64}{80} = 0.8
\end{aligned}$$

b) Berechnung der stationären Verteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_O \; \pi_M)$ über

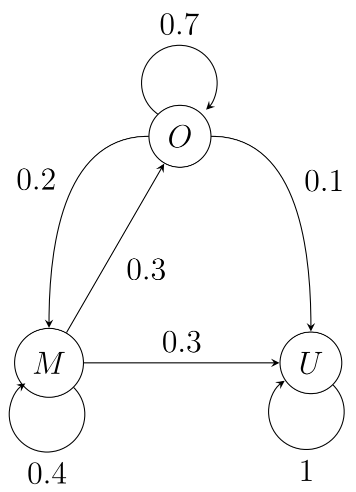
$$\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi} \quad \text{und} \quad \pi_O + \pi_M = 1$$

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\pi_O \cdot 0.6 + \pi_M \cdot 0.2 &= \pi_O \Longrightarrow \pi_M = 2\pi_O \\
\pi_O + 2\pi_O &= 1 \quad \Longrightarrow \pi_O = \frac{1}{3} \\
&\quad\;\; \Longrightarrow \pi_M = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Auf lange Sicht haben 2 Drittel der Autos Mängel und 1 Drittel ist in Ordnung.

c) Markov-Graph



d) Äquivalenzklassen als Mengen wechselseitig erreichbarer Zustände: Zustand O und M sind wechselseitig erreichbar und U als absorbierender Zustand, daher sind die Äquivalenzklassen: $\{O, M\}$ und $\{U\}$.

Die Zustände M und O sind nicht abgeschlossen (offen) und damit wegen endlichem Zustandsraum transient. Einzig U ist als absorbierender Zustand abgeschlossen und rekurrent. Kanonische Form:

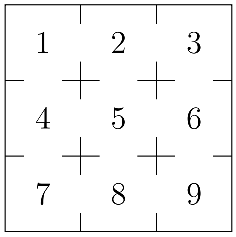
$$\hat{\boldsymbol{P}}_3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} U & O & M \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ O \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ein Vorteil ist das vereinfachen der Matrixmultiplikation für Mehr-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten auf Grund der Blockdiagonalstruktur der rekurrenten Zustände. Außerdem kann man sofort die Menge der rekurrenten und transienten Zustände ablesen.

e) Nein! Für die eingebettete Markov-Kette in einem regulären Markov-Prozess ist gefordert, dass $q_{ii} = 0$ oder $q_{ii} = 1$ für absorbierende Zustände ist.

Aufgabe 2

Ein Hamster wird in das folgende Labyrinth gesetzt:



Er bewegt sich zufällig durch die Räume und bei k Möglichkeiten zum Verlassen eines Raumes wählt er mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine dieser Möglichkeiten.

Sei $S = \{1, \ldots, 9\}$ der Zustandsraum der homogenen Markov-Kette $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, die angibt, in welchem Raum sich der Hamster befindet.

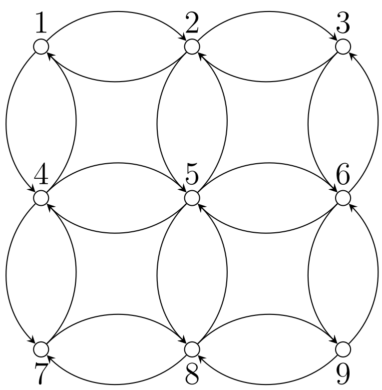
a) Zeichnen Sie den zugehörigen Markov-Graphen.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ dieser Markov-Kette an.
c) Ist X irreduzibel?
d) Ist X aperiodisch?
e) Welche Zustände von X sind rekurrent, welche transient?

In Raum 4 werden jetzt Sonnenblumenkerne – die Lieblingsspeise des Hamsters – gelegt. Demzufolge bewegt sich der Hamster nicht mehr aus Raum 4 weg, wenn er einmal dort angekommen ist. Die Folge der Räume, in denen sich der Hamster befindet, wird weiterhin als Markov-Kette aufgefasst.

f) Geben Sie die Übergangsmatrix für diese modifizierte Markov-Kette an.
g) Ist die modifizierte Markov-Kette irreduzibel?
h) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient?

Lösung Aufgabe 2

a) Markov-Graph



b) Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) Ja, X ist ist irreduzibel, da alle Zustände wechselseitig erreichbar sind, d.h. es gilt

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots, 9\}\ \exists\, t \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } p_{ij}^{(t)} > 0$$

d) Nein, X ist periodisch, da die Rückkehr in einen Zustand nur zu vielfachen von $d = 2$ Schritten möglich ist.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T_{ii} = 2n \mid X_0 = i) = 1$$

oder auch

$$\begin{cases} p_{ii}^{(t)} > 0 & \text{für } t \in \{2, 4, 6, \ldots\} \\ p_{ii}^{(t)} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) X ist abgeschlossene und irreduzible Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen, daher ist X rekurrent und damit auch alle Zustände; kein Zustand ist transient.

f) Änderung in Zeile 4:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

g) Nein, die modifizierte Markov-Kette ist nicht irreduzibel, da der Zustand 4 absorbierend ist ($p_{44} = 1$)

h) Rekurrent ist nur noch Zustand 4, absorbierende/abgeschlossene Klasse, alle anderen Zustände sind transient (offene Klasse, periodisch)