Aufgabe 1

Ein Sportfischer fährt am Wochenende zum Angeln an einen kleinen Weiher. In diesem Weiher befinden sich am frühen Morgen genau 10 Fische. Wenn noch n Fische im Weiher schwimmen, so ist die Zeit bis zum Anbeißen des nächsten Fisches exponentialverteilt mit dem Parameter $n \cdot \mu$, wobei $\mu = 0.2$ und $n = 1, ..., 10$ gilt.

(a) Welchem Prozess folgt die Anzahl der Fische im Weiher und welchem im Fangeimer?

(b) Geben Sie für diesen Prozess die Intensitätsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ und die Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ der eingebetteten Markov-Kette an.

(c) Wie viel Zeit verstreicht im Mittel, bis der Sportangler genau 5 Fische bzw. alle 10 Fische gefangen hat?

Lösung Aufgabe 1

(a) $X = \{X(t), t \geq 0\}$ bezeichne die Anzahl der Fische im Weiher.
$\Rightarrow$ X ist ein diskreter Markovprozess (exponentialverteilte Zwischenzeiten!), genauer ein Todesprozess, mit Übergängen $n \to n-1$ und Zustandsraum $S = \{0, \dots, 10\}$.
$\Rightarrow$ Die Anzahl der Fische im Eimer $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ ist ein Geburtsprozess mit gleichem Zustandsraum.

(b) Der Übergang des Geburtsprozesses $Z = i \quad \longrightarrow \quad Z = i+1$ für $i = 0, \dots, 9$ ist äquivalent zum Übergang des Todesprozesses $X = 10 - i \quad \longrightarrow \quad X = 10 - i - 1$:

i	X	Z	λ_i
0	$10 \to 9$	$0 \to 1$	$10 \cdot \mu$
1	$9 \to 8$	$1 \to 2$	$9 \cdot \mu$
2	$8 \to 7$	$2 \to 3$	$8 \cdot \mu$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	$1 \to 0$	$9 \to 10$	$1 \cdot \mu$
i	$10 - i \to 10 - i - 1$	$i \to i+1$	$(10 - i) \cdot \mu$

Demnach haben die Übergange des Geburtsprozesses die Intensitäten

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i+1} &= \lambda_i = (10 - i)\mu = 2 - 0.2 \cdot i \quad \text{für } i = 0, \dots, 9 \\ \lambda_{ii} &= -\lambda_i \end{aligned}$$

und die Intensitätsmatrix lässt sich wie folgt schreiben:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1.8 & 1.8 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.6 & 1.6 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Wie man erkennen kann, ist Zustand 10 absorbierend.

Die Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette lautet:

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 9 \\ 10 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \\
0 & 0 & & & & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array} .
$$

Denn: Für $i \neq j$ gilt $\lambda_{ij} = \lambda_i q_{ij}$, wobei $\lambda_i = -\lambda_{ii}$, und damit $q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i} = \frac{\lambda_{ij}}{-\lambda_{ii}}$. Das Zustand 10 absorbierend ist, gilt $q_{ii} = 1$ und $q_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

(c) Sei T_j die Zeit bis zum Anbeißen des j-ten Fisches für $j = 1, \ldots, 10$.

$$T_j \sim Exp(\lambda_{j-1}) \Rightarrow \mathbb{E}(T_j) = \frac{1}{\lambda_{j-1}}$$

Gesucht ist die erwartete Zeit, bis der Sportfischer 5 bzw. 10 Fische gefangen hat:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{5} T_j\right) &= \sum_{j=1}^{5} \mathbb{E}(T_j) = \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{\lambda_{j-1}} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{1.8} + \ldots + \frac{1}{1.2} = 3.228
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{10} T_j\right) &= \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}(T_j) = \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{\lambda_{j-1}} = \frac{1}{\lambda_0} + \cdots + \frac{1}{\lambda_9} \\
&= \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{0.2} = 14.64
\end{aligned}
$$