Statistik IV für Nebenfachstudierende

2. Schätzen und Testen

Andreas Mayr

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

2. Schätzen und Testen

Annahmen

$\underline{X} =$

mit $\mathbb{E}(\underline{X}) = \underline{\mu}$ und $\mathrm{Cov}(\underline{X}) = \underline{\underline{\Sigma}}$

Unabhängige Wiederholungen (*i.i.d.*)

$\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n$ (*i.i.d.*) wie $\underline{X}$

Schätzfunktion

- Schätzfunktion ist Transformation; Funktion von $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n$.
- Ziel Schätzung von $\underline{\theta}$ (Parameter)

  Beispiele:

- $\widehat{\underline{\theta}} = g(\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n)$ bzw. $T(\underline{X})$

Beispiel: Schätzung von μ

- $\underline{\widehat{\theta}} = \underline{\bar{x}} =$

Erwartungstreue

Sei $\widehat{\underline{\theta}} = T(\underline{X})$ eine Schätzfunktion, oder Schätzer. Dann heißt

$$\text{bias}(T, \theta) = \mathbb{E}(T) - \underline{\theta}$$

die <u>Verzerrung</u> (engl. Bias) von T

Falls

$$\text{bias}(T, \theta) = 0, \quad \text{also} \quad \mathbb{E}(T) = \underline{\theta},$$

so heißt t <u>erwartungstreu</u> oder <u>unverzerrt</u> (engl. unbiased) für $\underline{\theta}$.

Beispiel im univariaten Fall:

$X_1, \dots, X_n$ mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ *i.i.d.*

- $\bar{X}$ ist erwartungstreu für μ, denn

- $T_1 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ ist erwartungstreu für σ^2, denn

- $T_2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ ist verzerrt, denn

  mit Bias

Mean Squared Error

Der Ausdruck $\mathbb{E}\left\{(T(\underline{X}) - \underline{\theta})^2\right\} =: \mathsf{MSE}(T, \underline{\theta})$ heißt

mittlerer quadratischer Fehler (mean squared error).

Er zerlegt sich in:

$$\mathsf{MSE}(T, \underline{\theta}) = \mathsf{Var}(T(\underline{X})) + (\underbrace{\mathbb{E}\,(T(\underline{X})) - \underline{\theta}}_{\mathsf{bias}(T, \underline{\theta})^2})^2$$

Beweis (univariat):